

GRAVIMETRIA PARTE III:
RIDUZIONE DELLE MISURE GRAVIMETRICHE
ANOMALIA DI BOUGUER

Corso di Geofisica Ambientale e Applicata
Anno Accademico 2003-2004
Prof.ssa Gabriella Losito

Revisione: Ing. Rossana Angelini

1. RIDUZIONE DELLE MISURE GRAVIMETRICHE AL GEOIDE

L'unico modo per poter confrontare tra loro le misure gravimetriche ottenute in diversi punti della superficie terrestre, dopo averle selezionate e filtrate dall'effetto di marea, è quello di riferirle ad una stessa superficie equipotenziale, che, di solito, è il geoide (ovvero l'ellissoide che lo sostituisce in seconda approssimazione). In un generico punto, posto sulla superficie terrestre, si osserverà un valore della componente verticale di g in generale diverso da quello che si osserverebbe sulla superficie del geoide; bisogna allora apportare al valore della g osservata delle riduzioni, in modo da ottenere il valore della gravità che si misurerebbe in P' sul geoide privato delle masse esterne, al piede della verticale, condotta per il punto di stazione. Infatti, quando le misure di gravità vengono impiegate ai fini geologico-tettonici e, più in generale, quando si vuole mettere in evidenza il contributo delle disomogeneità interne, bisogna depurare i valori osservati dal contributo di qualsiasi altra causa (fig.1).

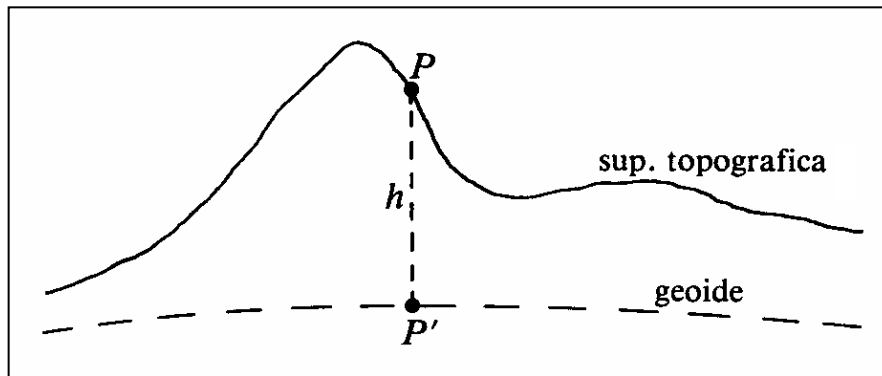


Fig.1 – Riduzione al geoide della gravità osservata nel punto di stazione P [da Norinelli]

1.1 RIDUZIONE PER LA LATITUDINE

È ottenuta differenziando l'equazione "schiacciamento polare", in cui si trascura il termine con $\sin^2(2\varphi)$ (§ parte I, [8]):

$$\frac{dg_L}{d\varphi} \cong 51851 \sin(2\varphi) \text{ (g.u./rad)} \quad [1],$$

in cui: g_L = gravità alla latitudine di osservazione;

φ = latitudine;

più in generale a noi interessa la variazione di g in funzione di $s=R\varphi$, distanza orizzontale NS:

$$\frac{dg_L}{ds} = \frac{1}{R_\varphi} \frac{dg_L}{d\varphi} \approx \frac{1}{R_{eq}} \frac{dg_L}{d\varphi} \quad [2],$$

in cui: g_L = gravità alla latitudine di osservazione;

R_{eq} = raggio equatoriale;

R_φ = raggio della terra alla latitudine φ ;

φ = latitudine;

ds = distanza orizzontale NS.

Questa riduzione è positiva movendosi dai poli verso l'equatore ed occorre nel caso in cui le misure siano molto distanti relativamente a φ . Una approssimazione valida correntemente è:

$$\Delta g = 0.081 \sin 2\varphi \quad (\text{g.u. per } 10 \text{ m}) \quad [3].$$

1.2. RIDUZIONE IN ARIA LIBERA O DI FAYE (PER LA QUOTA)

Consiste nel ridurre i valori di g , osservati a quote diverse, al livello del mare, come se tra il punto di stazione e la superficie geoidica non ci fossero masse interposte. È necessario allora conoscere il valore di dg/dr , ovvero la variazione di g con l'altezza. Si può supporre, per semplicità, la Terra sferica e trascurare il contributo della forza centrifuga (si ricorda che la forza centrifuga aumenta all'aumentare della distanza dall'asse di rotazione della Terra, cioè diminuisce verso il polo, e cresce con la quota). Sotto queste ipotesi, derivando rispetto a R l'equazione [6] della parte I si ottiene:

$$\left(\frac{dg}{dr} \right)_{r=R} = -2G \frac{M}{R^3} = -\frac{2}{R} \left(G \frac{M}{R^2} \right) = -2 \frac{g}{R} \quad [4],$$

dove R è il raggio medio della terra ed il segno meno indica che g diminuisce aumentando r . Sostituendo a g ed R i loro valori medi, si ottiene l'espressione 'in pratica' usata per calcolare la **riduzione in aria libera** alle nostre latitudini:

$$\Delta g' = 0.3086h \text{ (mgal/m)} \quad [5],$$

dove $h(m)$ è l'altezza del punto di stazione.

La riduzione $\Delta g'$ si aggiunge alla g osservata quando h è positivo, mentre va tolta se il punto di stazione si trova in una stazione depressa.

Nel sistema mks si ha (con h espressa sempre in m):

$$\Delta g \left(\frac{m}{s^2} \right) = -2 \cdot 9.8 \left(\frac{h}{6300 \cdot 10^3} \right) = 3.072 \cdot 10^{-6} h$$

$$\Rightarrow \Delta g \approx 3 \cdot 10^{-1} \text{ mgal/m};$$

a Roma il coefficiente di riduzione adottato è 0.330855.

In pratica per ogni m si ha una variazione di circa 0.3 mgal; data la precisione delle misure di g , occorre definire la quota con la precisione di almeno 3 cm.

1.3. RIDUZIONE PER LA PIASTRA O DI BOUGUER

Questa riduzione si adotta per tener conto del contributo attrattivo delle masse interposte tra il punto

di stazione P e il suo corrispondente P' sul geoide. Si toglie cioè il contributo delle masse costituenti una piastra indefinita di spessore h (se h è la quota della stazione) senza tener conto delle masse che sporgono rispetto alla piastra, né del fatto che in questo modo gli avvallamenti vengono artificialmente riempiti di materia: è come se ci trovassimo su un pianoro fittizio posto ad una certa quota rispetto al mare (fig.2).

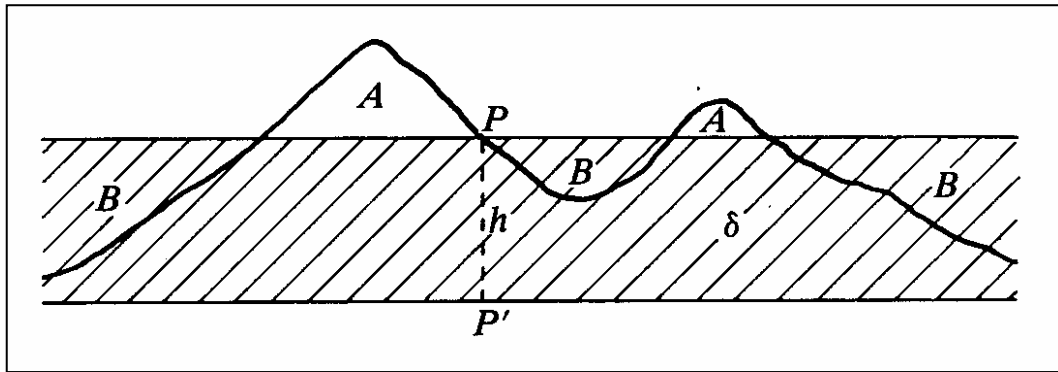


Fig.2 – Schema per la riduzione di Bouguer [da Norinelli]

Consideriamo, in un sistema di coordinate cilindriche (Fig.3), l'effetto dell'attrazione newtoniana sull'unità di massa nel punto P(0,0,0) prodotta da un elemento di massa dm, di coordinate (ρ,φ,z) e definita come $dm = \delta dV$, con δ densità e $dV = \rho d\phi d\rho dz$ volume elementare.

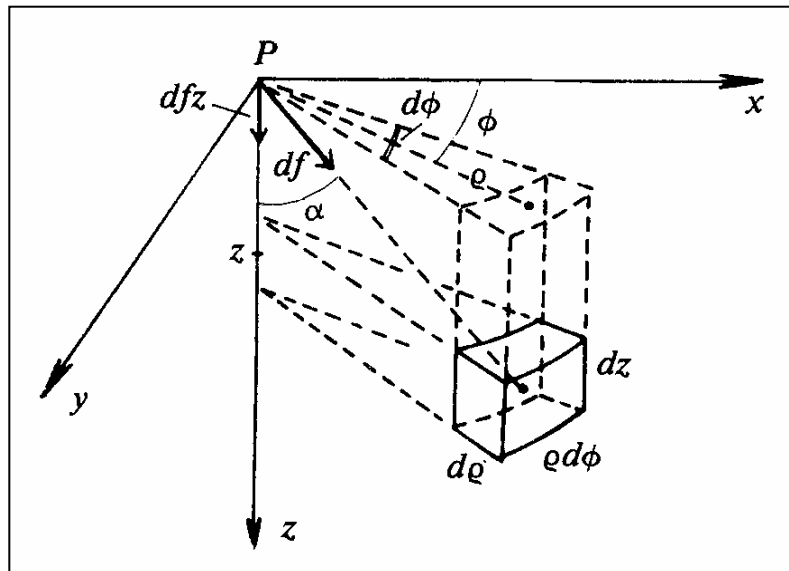


Fig.3 – Attrazione esercitata nel punto P da un elemento di massa dm

L'attrazione newtoniana esercitata da questa massa dm sull'unità di massa in P(0,0,0) è quindi:

$$dg = G \frac{dm}{r^2} = G \frac{\delta dV}{r^2} = G\delta \frac{\rho d\phi d\rho dz}{(\rho^2 + z^2)} \quad [6],$$

la cui componente verticale vale

$$dg_z = d\phi \cos \alpha = G\delta \frac{z \rho d\rho d\phi dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad [7].$$

L'attrazione di tutta la massa indefinita si ottiene allora integrando la precedente.

$$\begin{aligned} g_z &= G\delta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h z dz \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi G\delta \int_0^h z dz \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi G\delta \int_0^h z \left[-\frac{1}{\sqrt{(\rho^2 + z^2)}} \right]_0^\infty dz = \\ &= 2\pi G\delta \int_0^h z \cdot \frac{1}{z} dz = 2\pi G\delta \int_0^h dz = 2\pi G\delta h \quad [8]. \end{aligned}$$

In definitiva la **riduzione di Bouguer** è:

$$\Delta g'' = -g_z = -0.042\delta h \quad [9].$$

Il segno meno è dovuto al fatto che la riduzione di Bouguer, a differenza di quella in aria libera, viene sottratta quando h è positivo e viene aggiunta nel caso contrario.

La grossa difficoltà nell'applicazione di questa riduzione consiste nella determinazione del valore medio da attribuire alla densità δ : anche nel caso in cui lo strato sia omogeneo, se esso è di origine sedimentaria incoerente, si avrà sempre una densità crescente all'aumentare della profondità; inoltre nella maggioranza dei casi non si conosce la stratigrafia della zona.

1.4. RIDUZIONI PER LE MISURE IN MARE

Nel caso di misure sul fondo marino bisogna tenere conto che tra il punto di stazione e il geoide c'è il mare e che al suo posto ci dovrebbe essere la terra. Perciò:

- si toglie il contributo della massa d'acqua soprastante (tale riduzione è positiva perché ha diminuito il valore osservato)
- si riempie lo spazio così liberato dall'acqua con materiale di densità pari a quella δ del fondo: poiché, per la sua mancanza, il valore osservato è minore, la riduzione sarà ancora positiva.

1.5. RIDUZIONE TOPOGRAFICA

Se la superficie topografica del terreno su cui si opera non è piana, bisogna tener conto sia degli avvallamenti (che con la riduzione di Bouguer corrispondevano a masse arbitrariamente introdotte al di sotto del punto di stazione) che delle masse che sporgono rispetto alla piastra. Questa riduzione è sempre positiva; infatti il contributo delle masse a quota superiore ad h è negativo per la gravità

osservata in P, mentre riempiendo gli avvallamenti si è considerato un termine negativo di troppo. Per tener conto di queste ineguaglianze di massa, si può procedere ancora una volta considerando la componente verticale dg_z [7] dell'attrazione di una massa elementare (Fig. 4).

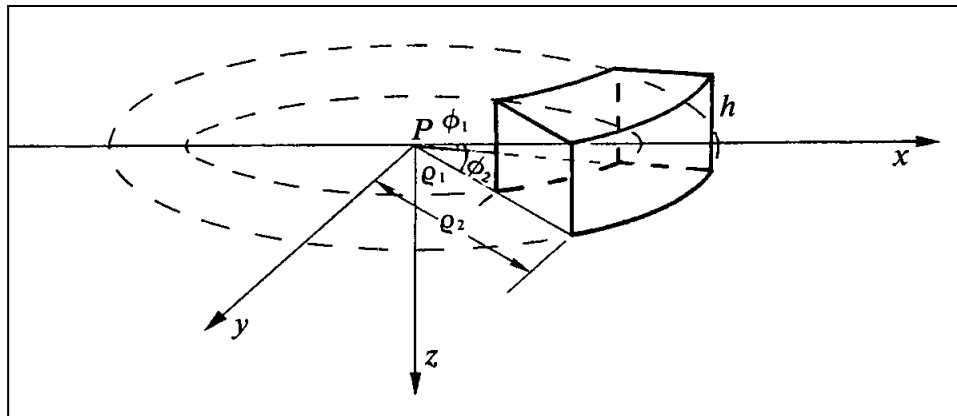


Fig.4 – Schema che illustra la riduzione topografica [da Norinelli]

Il contributo della massa elementare viene quindi integrato su intervalli di Δz , $\Delta \rho$ e $\Delta \phi$ relativi ad un elemento di massa finita equivalente alla massa sporgente o mancante, ma di forma più semplice, compreso tra due piani orizzontali, di cui uno passante per il punto di stazione e l'altro posto ad un'altezza media h :

$$\begin{aligned}
 g_z &= G\delta \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho \int_0^h \frac{zdz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = G\delta(\phi_2 - \phi_1) \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho \left[-\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right]_0^h d\rho = \\
 &= G\delta(\phi_2 - \phi_1) \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho \left[-\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} + \frac{1}{\rho} \right] d\rho = G\delta(\phi_2 - \phi_1) \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[1 - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \right] d\rho = \\
 &= G\delta(\phi_2 - \phi_1) \left[\rho - \sqrt{\rho^2 + h^2} \right]_{\rho_1}^{\rho_2} \quad [10];
 \end{aligned}$$

In definitiva si ottiene la formula di Messerschmidt per la riduzione topografica:

$$\Delta g''' = g_z = G\delta(\phi_2 - \phi_1) \left\{ (\rho_2 - \rho_1) + \sqrt{\rho_1^2 + h^2} - \sqrt{\rho_2^2 + h^2} \right\} [11],$$

dove appunto h non è la quota del punto P ma la quota media della porzione di terreno considerata rispetto al punto P(fig.4).

Per la determinazione della formula sono state costruite apposite tavole che tengono conto del fatto che il contributo attrattivo è maggiore per le masse più vicine al punto di misura. Hayford, infatti, ha diviso il terreno circostante il punto di misura in corone circolari di raggio crescente e suddiviso le zone in compartimenti (Fig. 5); per ogni compartimento si hanno valori caratteristici noti di ϕ_1 , ϕ_2 , ρ_1 e ρ_2 .

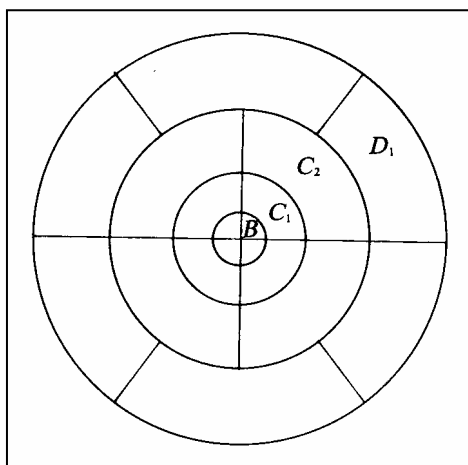


Fig.5 – Alcune zone di Hayford [da Norinelli]

Il centro delle zone di Hayford (disegnate su carte trasparenti) viene fatto coincidere con il punto di stazione riportato su carta topografica; ciascun compartimento delimiterà, sulla carta stessa, un'area della superficie terrestre di cui si deve stimare la quota media: la differenza tra questa quota media e la quota del punto di stazione è la h che compare nella formula, e che va cercata nelle tavole; le tavole forniscono infatti, per ogni compartimento, il valore di $\Delta g'''(h)$ che si ottiene con la [11] per $\delta=1\text{g/cm}^3$. Oggi comunque il ricorso alle tavole è sostituito dall'uso dei calcolatori elettronici.

N.B. La riduzione topografica diventa insignificante se $h/\rho \leq 1/20$.

1.6. RIDUZIONE PER L'EFFETTO INDIRETTO O DI BOWIE

Si applica solo quando si studiano regioni molto estese o la Terra intera. Infatti i valori della g osservata vengono ridotti al geoide, mentre i valori teorici, con cui si confrontano, sono relativi ad una distribuzione di densità calcolata per l'ellissoide: le due superfici hanno ondulazioni diverse e non è detto che coincidano, per cui si dovrebbe tenere conto anche della effettiva distanza tra le due superfici di riferimento.

2. ANOMALIA DI BOUGUER

Se al valore della gravità osservata in P si apportano le riduzioni di cui si è parlato (dopo aver corretto la g_{oss} della variazione diurna della gravità e marea gravimetrica), si può finalmente scrivere la gravità ridotta al geoide g_{rid} .

$$g_{\text{rid}} = g_{\text{oss}} + \Delta g' + \Delta g'' + \Delta g''' \quad [12],$$

dove $\Delta g'$ è la riduzione in aria libera; $\Delta g''$ è la riduzione di Bouguer e $\Delta g'''$ è la riduzione topografica.

Questo valore dovrebbe corrispondere a quello della gravità normale al geoide g_0 se la Terra fosse costituita da una successione di strati omogenei concentrici.

Nella pratica si riscontra però una differenza ($g_{rid} - g_0$) che può essere:

- nulla se nell'interno del punto di stazione c'è una distribuzione omogenea di massa
- positiva se c'è un eccesso di massa rispetto all'ipotesi teorica (Fig. 6a).
- negativa se c'è un difetto di massa rispetto all'ipotesi teorica (Fig. 6b).

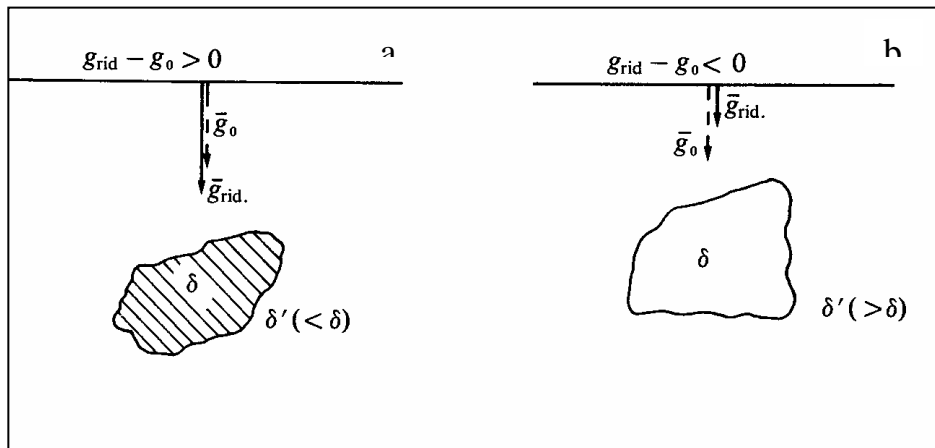


Fig.6 – Differenza tra la gravità ridotta g (nelle dispense g_{rid}) e la gravità normale g_0
 [da Norinelli]

La differenza ($g_{rid} - g_0$), definita ANOMALIA DI BOUGUER, dà informazioni riguardo alle variazioni di densità, sia profonde che superficiali; le linee che congiungono i punti di uguale anomalia sono dette ISOANOMALE SECONDO BOUGUER.

Se al di sotto del punto di stazione c'è una massa sepolta di densità δ , diversa da quella del terreno circostante, la componente verticale dell'attrazione varierà come se la massa sepolta (o la grotta) avesse una densità pari alla densità differenziale $\sigma = \delta - \delta'$ (Fig.7). Chiameremo massa perturbante quella che produce le anomalie di gravità.

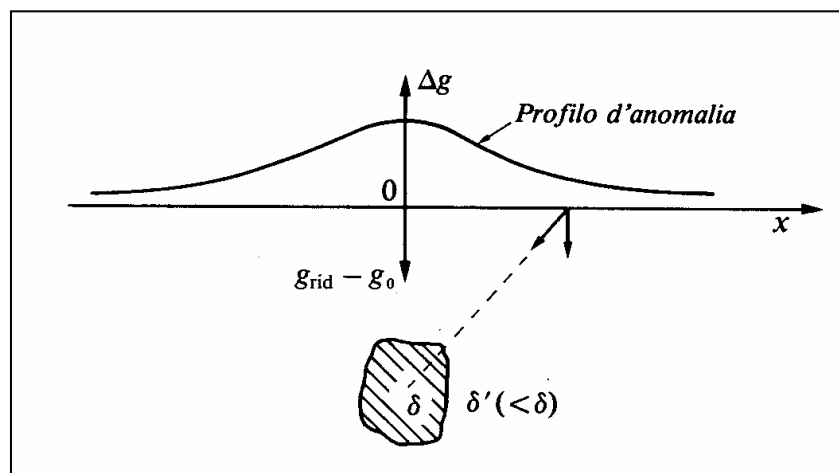


Fig.7 – Profilo di anomalia gravimetrica [da Norinelli]

A determinare quali sono i limiti per cui un'anomalia è più o meno apprezzabile è la sensibilità strumentale. Inoltre un'anomalia rilevata in un solo punto di misura può essere attribuita ad un'infinità di casi possibili; solo se si ha a disposizione una rete di punti su un'area convenientemente estesa il numero di casi può essere ridotto attraverso l'interpretazione delle isoanomale.

Interpretare le anomalie gravimetriche attraverso lo studio delle isoanomale di Bouguer significa determinare la densità, la forma e la profondità della struttura che le ha provocate: il problema, per come si presenta, è ovviamente indeterminato. Alla riduzione del grado di indeterminazione contribuiscono le conoscenze geologiche o geofisiche riguardanti i valori più probabili della densità o della profondità.

Per avere un'idea di quelli che sono gli ordini di grandezza:

- se la massa perturbante ha dimensioni dell'ordine del metro e profondità di qualche metro, si rileverà in superficie un'anomalia estesa a qualche decina di metri;
- se le dimensioni e la profondità sono dell'ordine del chilometro, le anomalie corrispondenti sono estese qualche chilometro;
- le anomalie della crosta terrestre e quelle derivanti da differenze di densità subcrostali sono estese centinaia di chilometri.

L'estensione dell'anomalia è quindi legata essenzialmente alla profondità della massa, mentre a parità di profondità l'ampiezza del picco dipende dalla densità della massa sottostante.