

**GRAVIMETRIA PARTE IV:
CAMPO DI REGIONALITÀ
INTERPRETAZIONE QUANTITATIVA:
METODO DIRETTO E METODO INDIRETTO
ISOSTASIA**

Corso di Geofisica Ambientale e Applicata
Anno Accademico 2003-2004
Prof.ssa Gabriella Losito

Revisione: Ing. Rossana Angelini

1. CAMPO DI REGIONALITA'

Si possono distinguere:

- le “anomalie regionali” (o di grande estensione) , attribuibili a cause profonde che influenzano tutto il rilievo o almeno buona parte di esso; la superficie che le rappresenta ha una pendenza non variabile rapidamente e le isoanomale hanno di conseguenza piccole curvature e sono distanziate regolarmente. Interessano studi di tettonica profonda;
- le “anomalie locali” (o di estensione limitata), influenzano poche stazioni. La superficie che le rappresenta ha grande curvatura e di conseguenza le isoanomale sono molto contorte e irregolarmente distanziate. Sono interessanti soprattutto per ricerche minerarie, ma forniscono utili indicazioni ad esempio nello studio di un basamento roccioso allorché si vogliono mettere in evidenza particolarità topografiche del fondo stesso.

Per separare le anomalie locali, dette anche residue, dalle anomalie regionali si esegue una operazione di filtraggio, analoga a quella usata nell'elaborazione numerica dei dati quando si vuole togliere una determinata frequenza. Per far questo si ricorre a metodi analitici e grafici.

I metodi grafici consistono in una semplice operazione di “lisciamento “ delle isoanomale, considerando lo scostamento delle linee isoanomale da quelle lisce come anomalia residua nel punto. Basta, in pratica, sovrapporre al foglio delle isoanomale di Bouguer un foglio di carta lucida su cui tracciare “a sentimento” le isoanomale che rappresentano l'effetto regionale. Quindi si segnano punto per punto i valori delle anomalie residue Δg_{res} calcolando la differenza:

$$\Delta g_{res} = \Delta g_B - \Delta g_{reg} \quad [1],$$

dove Δg_B è l'anomalia di Bouguer e Δg_{reg} è l'anomalia regionale (isoanomale lisce).

Infine si congiungono i punti di uguale anomalia residua (Fig.1).

I metodi grafici sono però troppo soggettivi e si preferisce perciò applicare metodi analitici (come il metodo dei minimi quadrati).

Il tipo di interpretazione che si ricava attraverso l'insieme di questi metodi è, però, solamente qualitativo ed assicura solo l'esistenza nel sottosuolo di masse di densità differente da quella del mezzo circostante, indicandone la presunta posizione planimetrica e, entro certi limiti, l'estensione (in prima approssimazione si possono “leggere” le isoanomale di Bouguer quali isoipse della struttura sepolta che genera l'anomalia).

I parametri che limitano e definiscono la causa dell'anomalia (intesa come forma, densità e profondità della massa perturbante) possono essere precisati solo attraverso un'interpretazione quantitativa: l'indeterminazione, propria del metodo, ci obbliga tuttavia a fare delle ipotesi sul valore di un parametro per poter determinare gli altri (ci si serve per questo di dati geologici o

geofisici, relativi alla zona in esame, che permettono di determinare i valori più probabili della densità e/o della profondità).

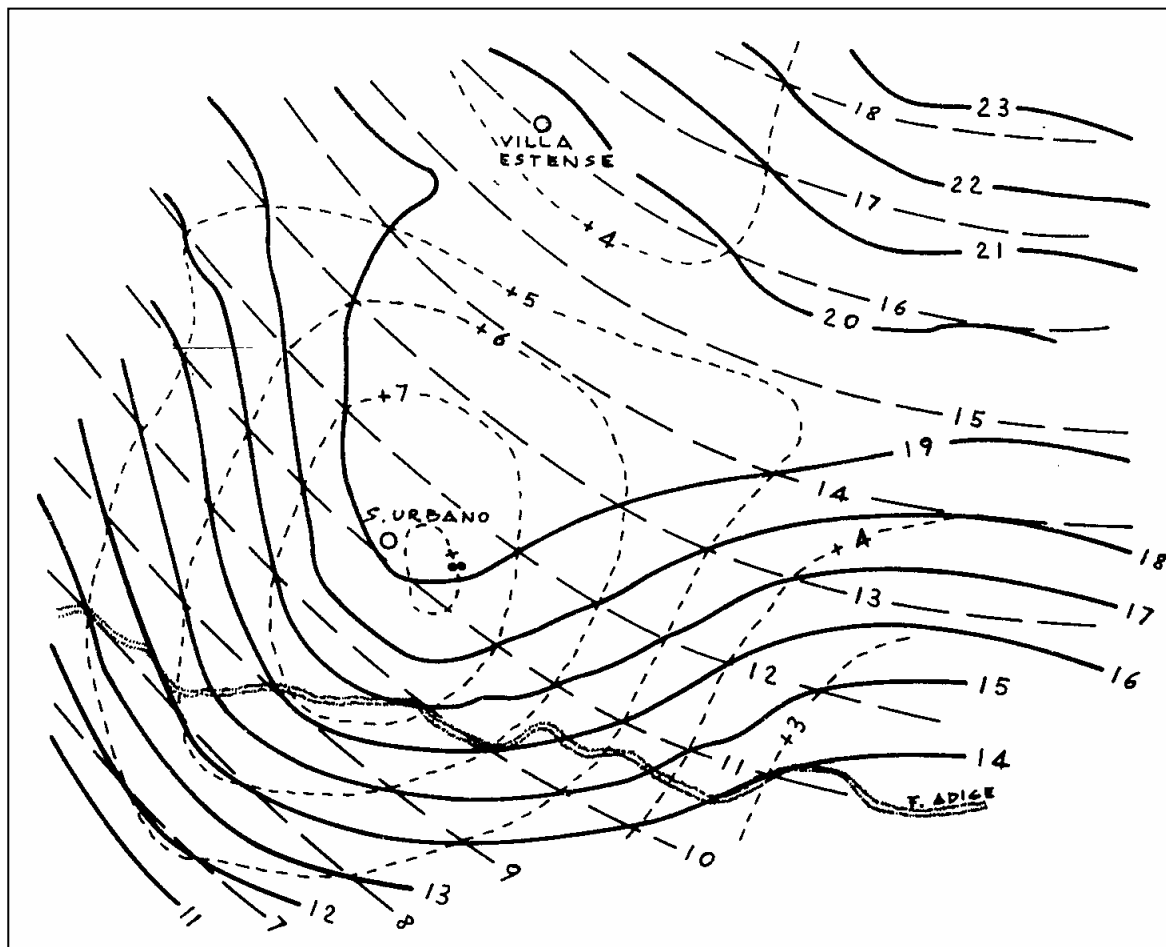


Fig.1 – Isoanomale di Bouguer (linea continua), regionali (a tratto lungo) e residue (a tratteggio)
[da Norinelli]

2. INTERPRETAZIONE QUANTITATIVA: IL METODO DIRETTO

Consiste nel confrontare le anomalie sperimentali con anomalie tecniche di cui sono già state studiate le proprietà. Questo sarà tanto più agevole quanto maggiore è il numero di curve tecniche a disposizione (oggi pressoché infinito grazie al contributo dell'informatica). Praticamente si suppone che la distribuzione di massa che determina l'anomalia corrisponda ad alcune strutture semplici e i parametri di queste strutture (densità, profondità, dimensioni) sono aggiustati fino a quando l'anomalia teorica così calcolata non rispecchia l'andamento dell'anomalia sperimentale.

2.1 CALCOLO DELL'ANOMALIA DI UNA SFERA.

Consideriamo una massa sepolta a forma sferica avente raggio R (Fig. 2). Il valore dell'attrazione nel punto $P(x,0,0)$ sarà dato da:

$$\Delta g_s = G \frac{M}{r^2} = G \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \delta \right) \frac{1}{(\sqrt{x^2 + h^2})^2} = \frac{4}{3} \pi R^3 G \delta \frac{1}{x^2 + h^2} \quad [2],$$

dove: G è la costante di gravitazione universale; M è la massa della sfera; r è la distanza tra il punto P e il centro della sfera; δ è la densità differenziale (ossia la differenza tra la densità della sfera e quella del terreno circostante); h è la quota del centro della sfera.

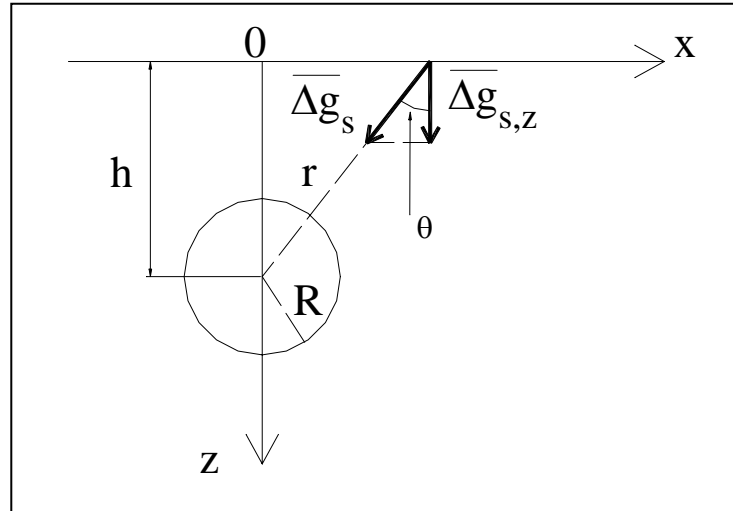


Fig.2 – Calcolo dell’anomalia gravimetrica relativa ad una massa sferica;
l’asse y esce dal piano della figura

L’anomalia gravimetrica corrispondente è data dalla componente di questa attrazione lungo l’asse z:

$$\Delta g_{s,z} = \Delta g_s \cos\theta = \Delta g_s \frac{h}{r} = \frac{4}{3} \pi G R^3 \delta \frac{h}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \quad [3].$$

dove θ è l’angolo che la distanza r forma con l’asse verticale delle z .

Più in generale, se x_c è la coordinata lungo l’asse x della proiezione in superficie del centro della sfera, si avrà:

$$\Delta g_{s,z} = \frac{4}{3} \pi G R^3 \delta \frac{h}{[(x - x_c)^2 + h^2]^{\frac{3}{2}}} \quad [4].$$

E’ importante sottolineare che questa formula vale per un profilo orizzontale passante per la proiezione in superficie del centro della sfera: in Fig. 3a è riportato un esempio di profilo per cui si può usare la formula, mentre in Fig.3b è riportato un esempio di profilo per cui non è valida la formula.

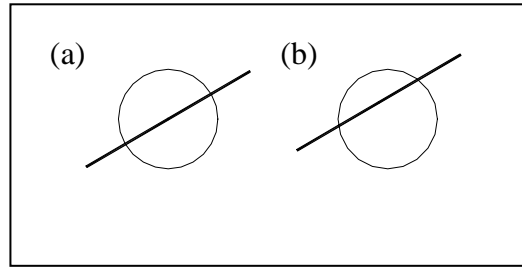


Fig. 3 – Rappresentazione nel piano xy di un profilo per cui la formula [4] è applicabile (a) e di un profilo per cui la formula non è applicabile (b).

Un altro aspetto a cui bisogna fare molta attenzione sono le unità di misura adottate.

Si ricorda che nel sistema c.g.s.: $G = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$; $\delta \text{ (g cm}^{-3}\text{)}$, $\Delta g_{s,z} \text{ (gal)}$ e le distanze sono espresse in cm. Nel sistema S.I.: $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$; $\delta \text{ (kg m}^{-3}\text{)}$, $\Delta g_{s,z} \text{ (m s}^{-2}\text{)}$ e le distanze sono espresse in m.

Una volta fissati i parametri δ , R , x_c e h , l'anomalia risulterà funzione della sola x : $\Delta g_{s,z} = \Delta g_{s,z}(x)$ sarà quindi la curva che rappresenta l'andamento dell'anomalia gravimetrica lungo l'asse x (Fig.4).

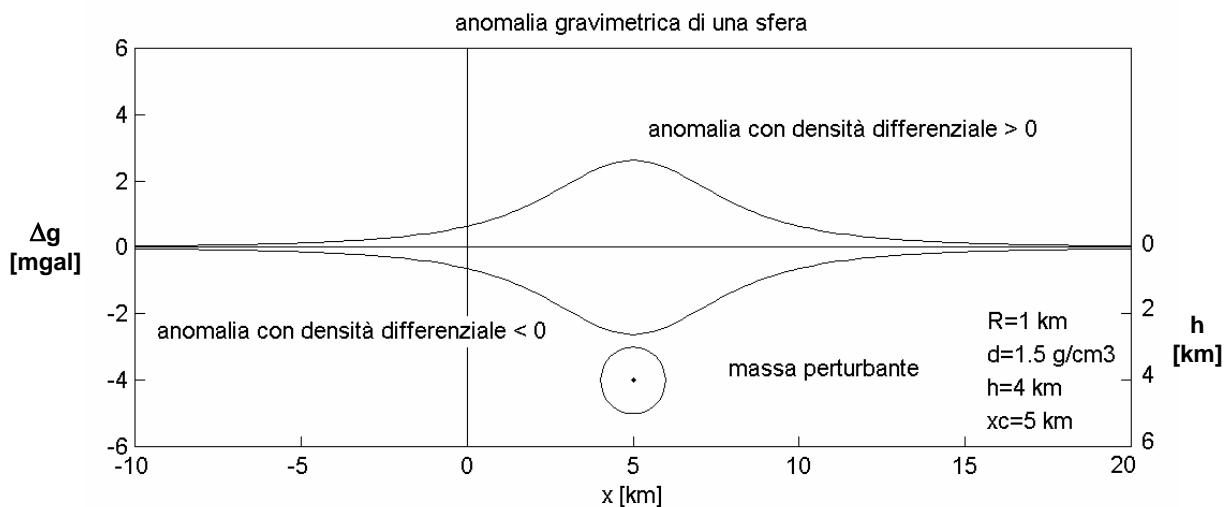


Fig.4 – Andamento lungo l'asse x dell'anomalia gravimetrica relativa ad una massa sferica

La funzione avrà un estremo (un massimo o un minimo a seconda del segno di δ) in corrispondenza della verticale passante per il baricentro (cioè per $x = x_c$):

$$(\Delta g_{s,z})_{\max} = \Delta g_{s,z}(x = x_c) = \frac{GM}{h^2} \quad [5],$$

dove $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \delta$ è appunto la massa della sfera;

all'aumentare di x (e quindi della distanza dal centro della sfera) gli effetti della massa perturbante diminuiscono, fino a diventare trascurabili; per avere un'idea di quanto velocemente diminuisce la funzione con la distanza, proviamo a calcolare il valore $x_{1/2}$ per il quale risulta

$$\Delta g_{s,z}(x = x_{1/2}) = (\Delta g_{s,z})_{\max}/2$$

imponendo:

$$\frac{GMh}{[(x_{1/2} - x_c)^2 + h^2]^{3/2}} = \frac{1}{2} \frac{GM}{h^2}$$

e svolgendo gli opportuni calcoli, si ottiene:

$$x_{1/2} = x_c \pm \sqrt{0.59}h \approx x_c \pm \frac{3}{4}h \quad [6].$$

Le isoanomale relative all'anomalia prodotta da una massa sferica perturbante sono circonferenze concentriche: se $\delta > 0$, allora i valori dell'anomalia decrescono verso l'esterno, se invece $\delta < 0$, i valori decrescono verso l'interno.

Può essere interessante vedere come varia $\Delta g_{s,z}$ in funzione degli altri parametri in gioco:

- all'aumentare, in valore assoluto, della densità differenziale δ (Fig. 5), aumenta, sempre in valore assoluto, il picco della curva ed inoltre si allarga la zona in cui l'effetto della sfera non è trascurabile;
- maggiore è la profondità h del centro della sfera (Fig.6), maggiore è la zona in cui gli effetti della sfera non sono trascurabili (la campana si allarga), ma l'intensità dell'anomalia è inferiore (la campana è più schiacciata);
- all'aumentare del raggio della sfera R (Fig.7), aumenta l'effetto perturbante dovuto alla sfera stessa (le curve sono più larghe e più alte); è importante ricordare che anche piccole variazioni del raggio possono determinare variazioni significative di $\Delta g_{s,z}$ poiché nella formula compare R^3 .

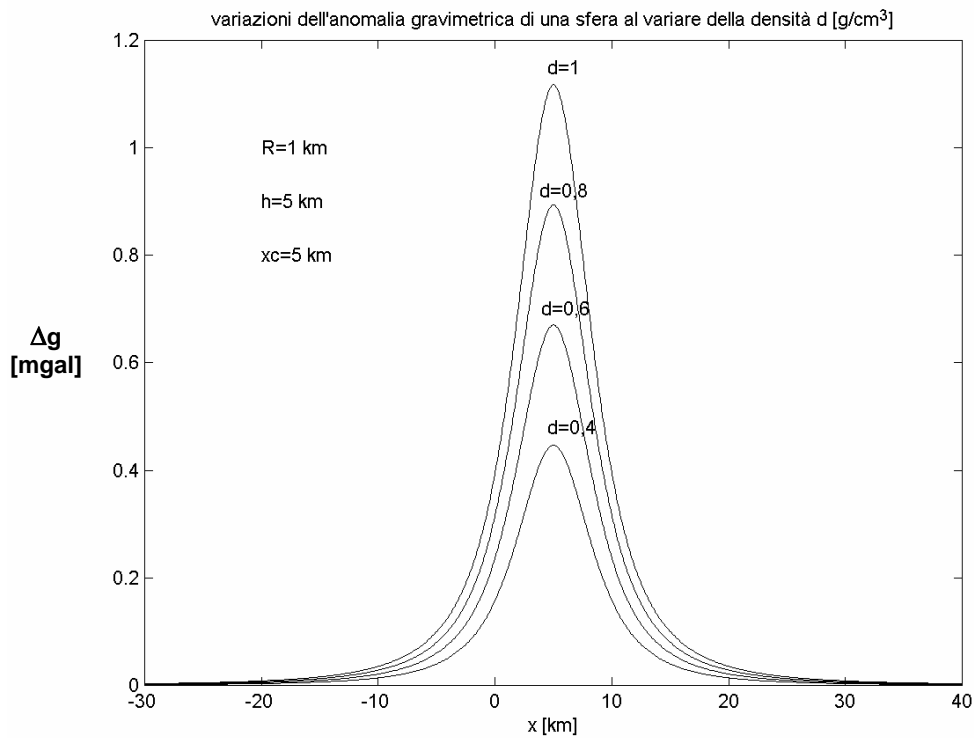


Fig. 5 – Effetti della variazione della densità differenziale d sull'anomalia gravimetrica relativa ad una massa sferica

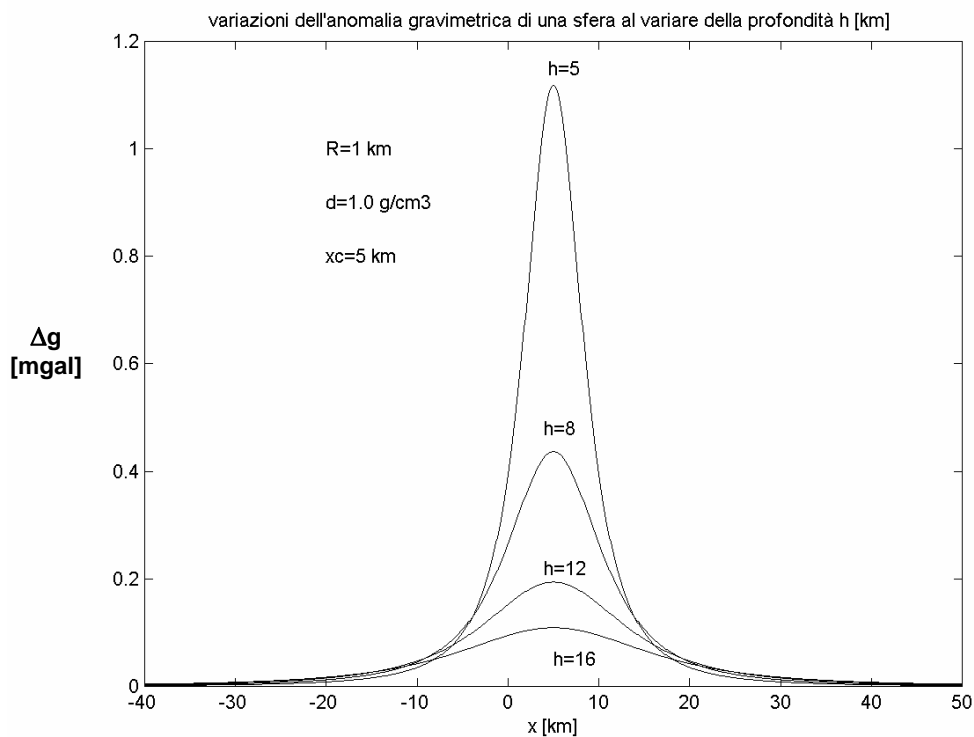


Fig.6 - Effetti della variazione della profondità h del centro di una massa sferica sull'anomalia gravimetrica relativa alla massa stessa

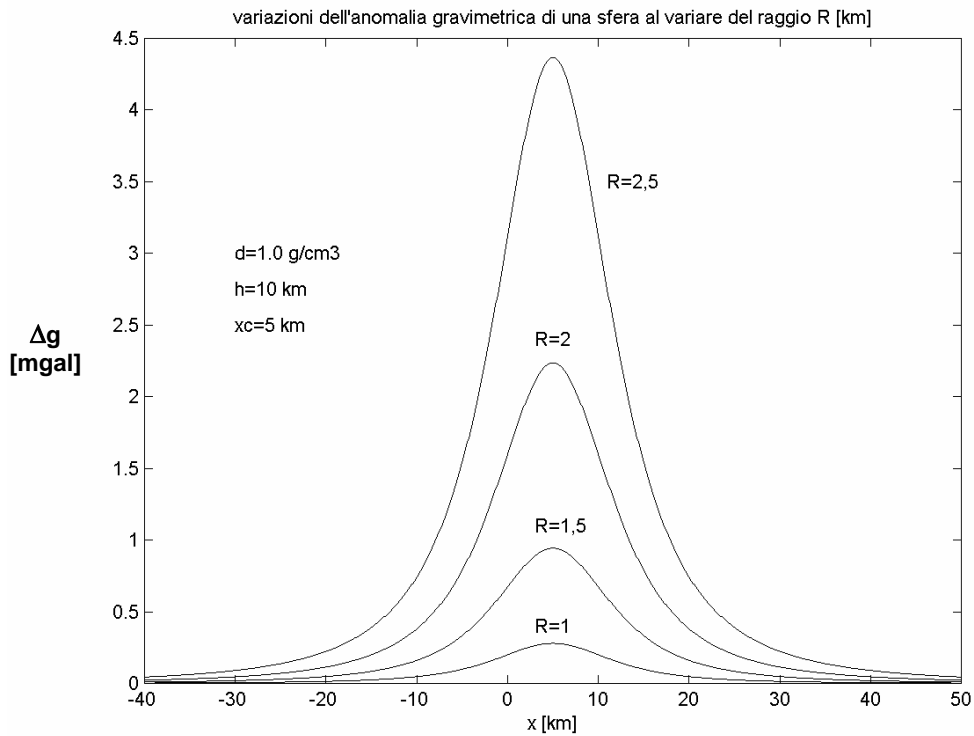


Fig.7 - Effetti della variazione del raggio R di una massa sferica sull'anomalia gravimetrica relativa alla massa stessa

2.2 CALCOLO DELL'ANOMALIA DI UN CILINDRO ORIZZONTALE INDEFINITO

Per ottenere l'effetto gravimetrico lungo l'asse x di un cilindro con asse orizzontale parallelo all'asse y, partiamo dall'effetto di un disco di spessore dy, con centro in C(0,y,h) (Fig.8).

L'attrazione Newtoniana esercitata dal disco nel punto P(x,0,0) è (supposta tutta la massa concentrata nel centro):

$$dg = \frac{Gdm}{r^2} = G(\delta\pi R^2 dy) \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2})^2} = G\delta\pi R^2 \frac{dy}{x^2 + y^2 + h^2} \quad [7],$$

dove: G è la costante di gravitazione universale; dm è la massa del disco; r è la distanza tra il punto P e il centro del disco; δ è la densità differenziale (ossia la differenza tra la densità del cilindro e quella del terreno circostante); R è il raggio del disco; h è la quota del centro del disco.

L'anomalia dovuta al disco sarà la componente verticale di dg, quindi:

$$dg_z = dg \cdot \cos\theta = dg \frac{h}{r} = G\delta\pi R^2 \frac{hdy}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \quad [8]$$

dove θ è l'angolo che la forza dg forma con l'asse verticale delle z.

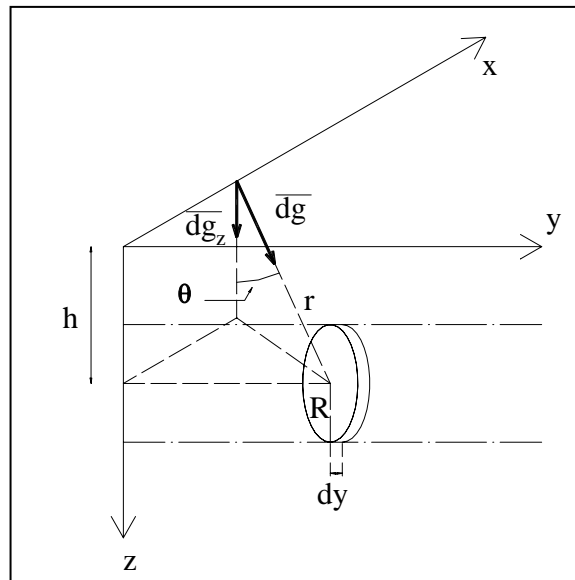


Fig. 8 – Calcolo dell’anomalia gravimetrica relativa ad una massa cilindrica orizzontale indefinita

L’anomalia gravimetrica dell’intero cilindro sarà ottenuta integrando tra $-\infty$ e $+\infty$ l’anomalia gravimetrica dovuta al disco:

$$\Delta g_{c,z} = G\delta\pi R^2 h \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} = 2G\delta\pi R^2 \frac{h}{x^2 + h^2} \quad [9];$$

questo risultato è ottenuto facilmente ricordando che l’integrale risulta invariante rispetto a y ; più in generale, se x_c è la coordinata lungo l’asse delle x dei punti dell’asse del cilindro, si avrà:

$$\Delta g_{c,z} = 2G\delta\pi R^2 \frac{h}{(x - x_c)^2 + h^2} \quad [10].$$

E’ importante sottolineare che anche questa formula non vale per qualunque profilo orizzontale, ma solo per un profilo orizzontale ortogonale all’asse del cilindro (Fig. 9).

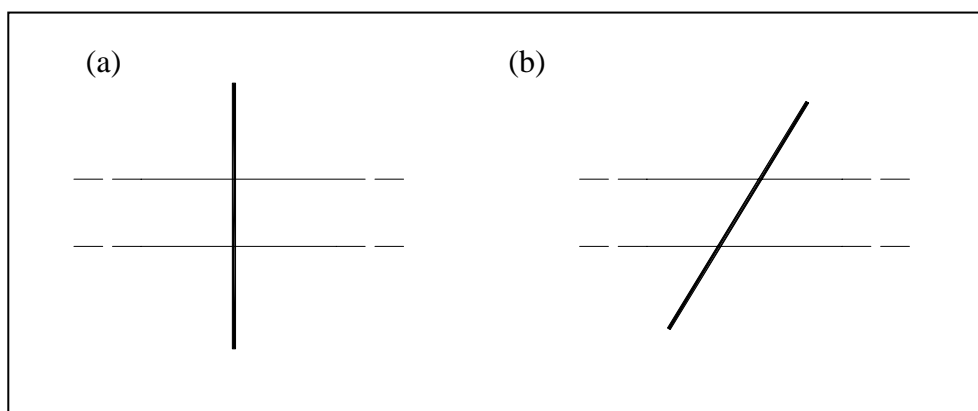


Fig. 9 – Rappresentazione nel piano xy di un profilo per cui la formula [10] è applicabile (a) e di un profilo per cui la formula non è applicabile (b).

Per quanto riguarda le unità di misura adottate, valgono le stesse precisazioni viste per l'anomalia della sfera.

L'andamento dell'anomalia in funzione della direzione x (una volta fissati gli altri parametri) è analogo all'anomalia prodotta da una sfera (Fig. 10): la curva $\Delta g_{c,z} = \Delta g_{c,z}(x)$ avrà un estremo (un massimo o un minimo a seconda del segno di δ) in corrispondenza dell'asse del cilindro (cioè per $x=x_c$) e all'aumentare di x (e quindi della distanza dall'asse del cilindro) gli effetti della massa perturbante diminuiscono, fino a diventare trascurabili; il valore massimo della curva vale

$$(\Delta g_{c,z})_{\max} = \Delta g_{c,z}(x = x_c) = \frac{2\pi G \delta R^2}{h} \quad [11].$$

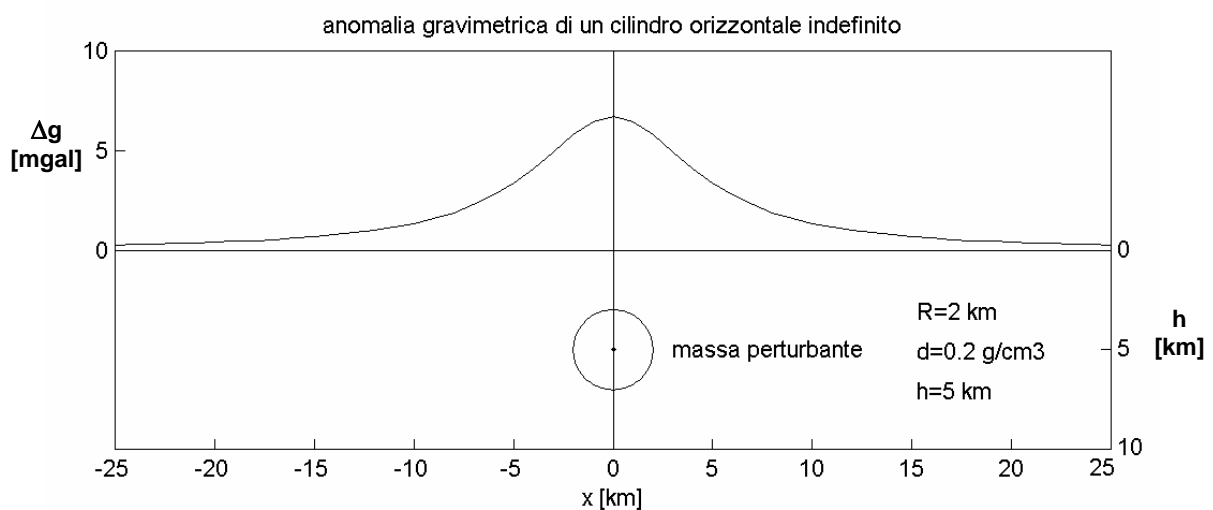


Fig.10 – Andamento lungo l'asse x dell'anomalia gravimetrica relativa ad una massa cilindrica orizzontale indefinita

Può essere interessante confrontare le anomalie gravimetriche dovute ad una sfera e ad un cilindro orizzontale indefinito a parità dei valori assunti dai parametri δ , R , x_c e h (Fig. 11): si osserva facilmente che gli effetti perturbanti del cilindro sono nettamente maggiori rispetto a quelli di una massa sferica (infatti il picco dell'anomalia del cilindro è molto maggiore rispetto a quello della sfera e la zona di influenza in cui gli effetti del cilindro non sono trascurabili è più estesa di quella della sfera).

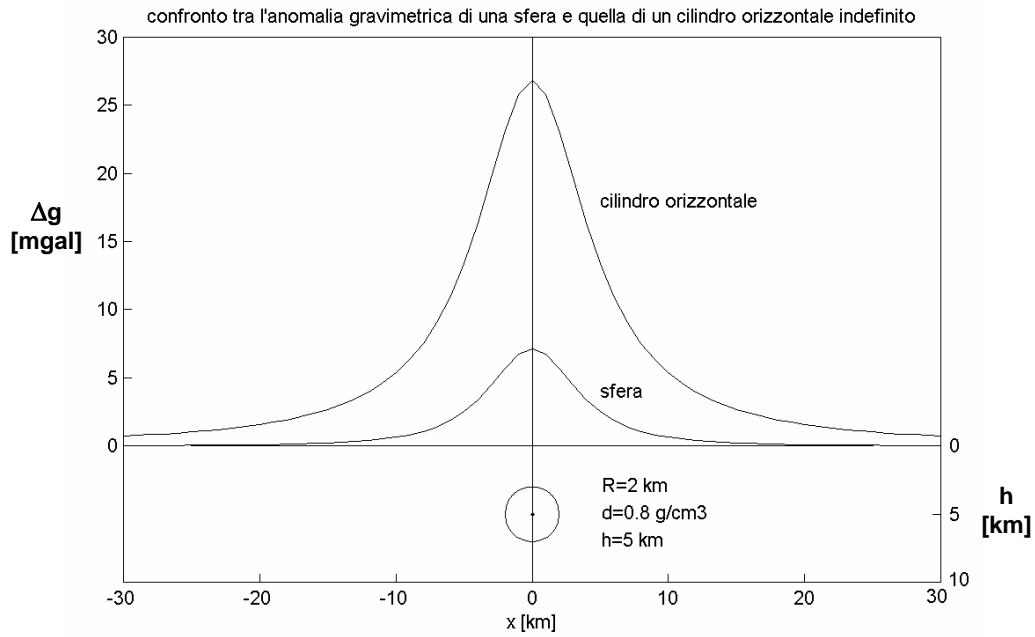


Fig.11– Confronto tra l’anomalia gravimetrica relativa ad una massa sferica e quella relativa ad una massa cilindrica orizzontale indefinita, a parità dei parametri R,d e h

Nelle figure successive (Figg.12-14) sono riportate le variazioni dell’anomalia di una massa cilindrica orizzontale indefinita al variare dei parametri δ , R e h.

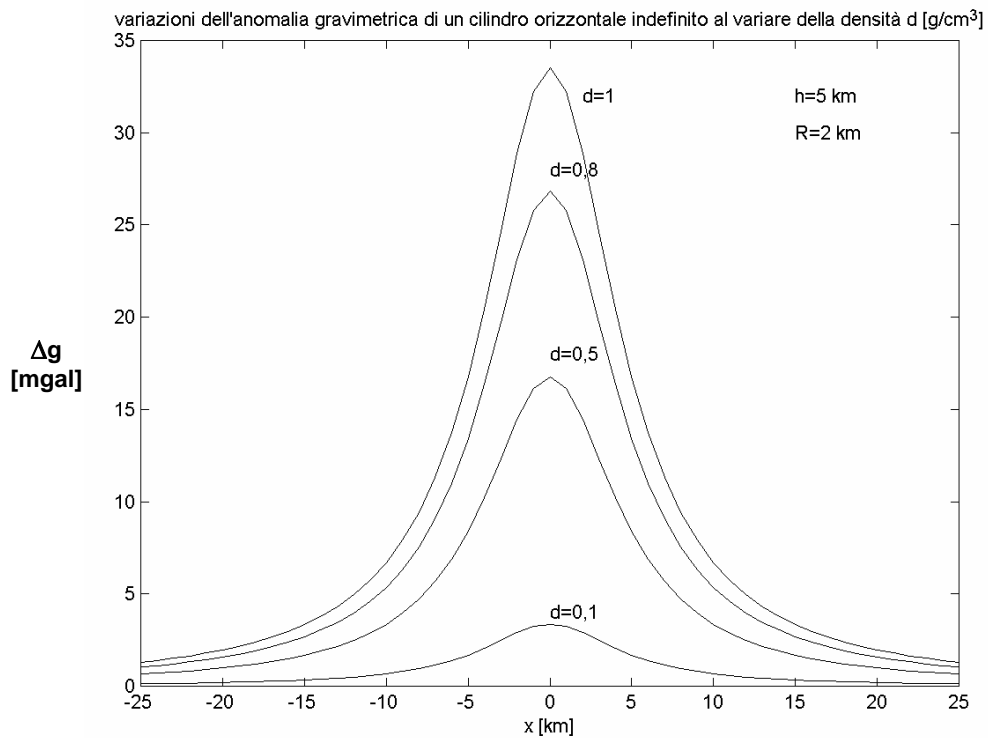


Fig. 12 – Effetti della variazione della densità differenziale d sull’anomalia gravimetrica relativa ad una massa cilindrica orizzontale indefinita

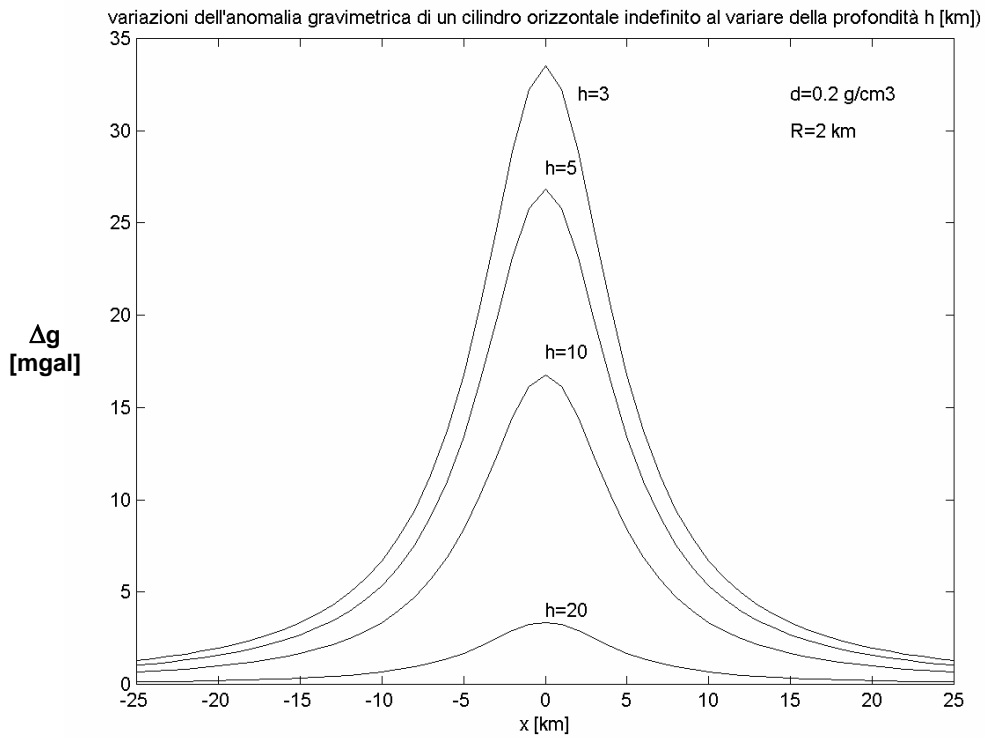


Fig. 13 – Effetti della variazione della profondità h dell'asse di una massa cilindrica orizzontale indefinita sull'anomalia gravimetrica relativa alla massa stessa

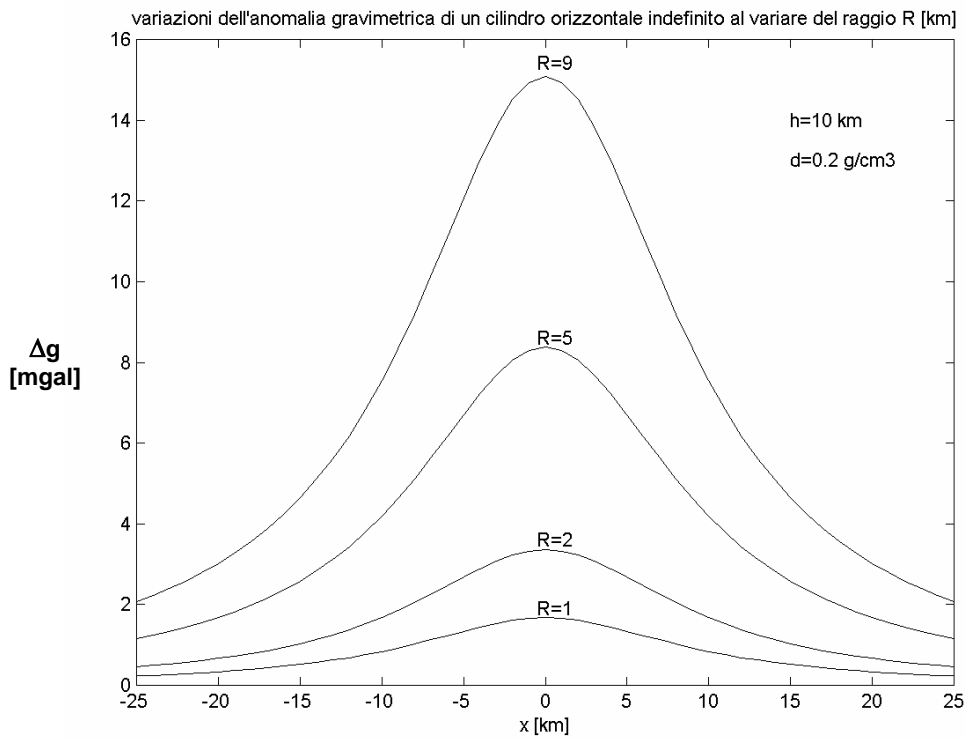


Fig. 14 – Effetti della variazione del raggio R di una massa cilindrica orizzontale indefinita sull'anomalia gravimetrica relativa alla massa stessa

2.3 CALCOLO DELL'ANOMALIA RELATIVA AD UNA FAGLIA VERTICALE

Una faglia verticale può essere schematizzata (Fig.15) tramite una struttura di densità uniforme δ_2 infinitamente estesa verso il basso e limitata superiormente da due semipiani orizzontali (posti alle profondità h_1 e h_2 , con $h_2 > h_1$, la cui differenza $h_2 - h_1$ è detta rigetto della faglia) raccordati tra loro da un piano verticale.

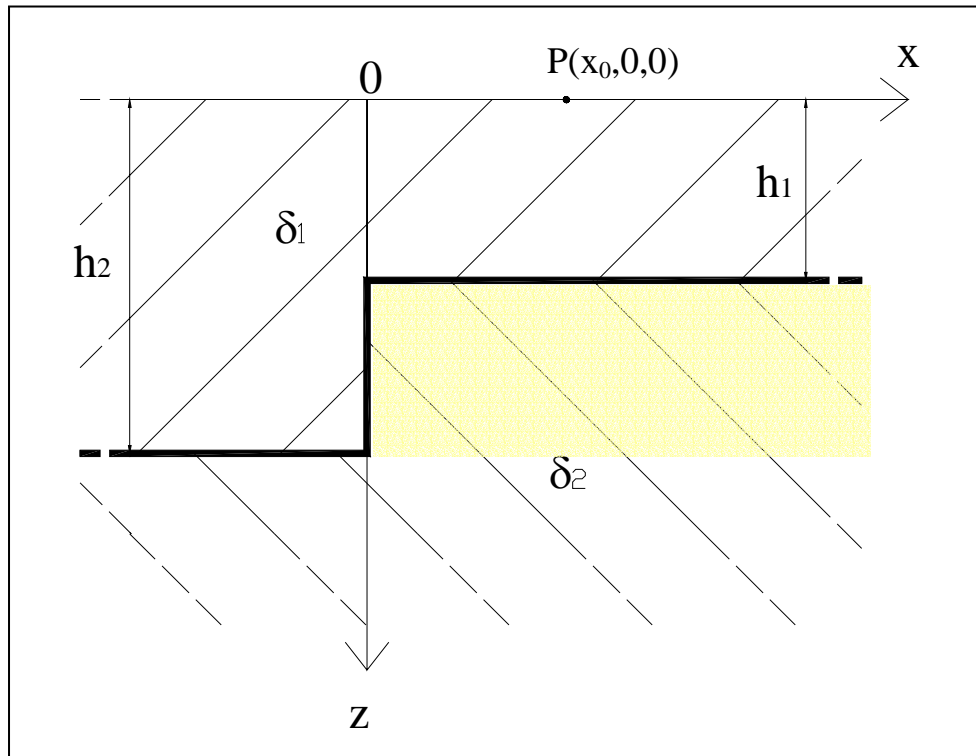


Fig.15 – Struttura che schematizza una faglia verticale

L'anomalia gravimetrica provocata nel punto $P(x_0, 0, 0)$ dalla presenza della faglia è da imputare alla presenza di una massa perturbante rispetto alla situazione di due strati orizzontali paralleli di densità rispettivamente δ_1 e δ_2 , separati dal piano orizzontale a profondità h_2 . Il terreno di densità δ_2 al di sotto di h_2 dà un contributo costante su tutti i punti del piano xy (è infatti l'anomalia relativa ad una struttura tabulare), contributo che non viene minimamente alterato dalla presenza della faglia; analogamente, anche il contributo del terreno di densità δ_1 posto al di sopra dei due semipiani orizzontali non è alterato dalla presenza della faglia. Ciò che determina una differenza rispetto alla situazione senza faglia è quindi la sola struttura (di densità differenziale $\delta = \delta_2 - \delta_1$) limitata dai due semipiani orizzontali a quota h_1 e h_2 : l'anomalia gravimetrica dovuta a questa struttura sarà ottenuta integrando sui limiti della struttura stessa l'anomalia gravimetrica dovuta ad un elemento di massa infinitesima dm .

L'attrazione gravitazionale dg nel punto $P(x_0,0,0)$ dovuta all'elemento di massa differenziale infinitesima $dm(x,y,z)$ è (Fig. 16):

$$dg = G \frac{dm}{r^2} = G \frac{(\delta dx dy dz)}{r^2} \quad [12],$$

dove G è la costante di gravitazione universale; r è la distanza tra l'elemento di massa dm ed il punto P ; δ è appunto la densità differenziale e dx , dy e dz sono le dimensioni infinitesime dell'elemento di massa dm .

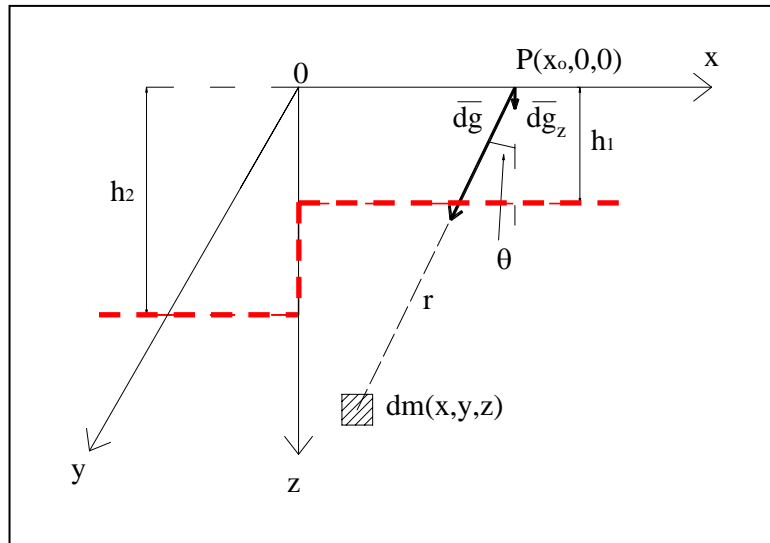


Fig. 16 – Calcolo dell'anomalia gravimetrica relativa ad una faglia verticale; la linea spessa tratteggiata è la proiezione della faglia sul piano xz

L'anomalia gravimetrica dg_z relativa all'elemento di massa differenziale dm è quindi la componente verticale di dg :

$$dg_z = dg \cdot \cos\theta = dg \frac{z}{r} = G\delta dx dy dz \frac{z}{r^3} = G\delta \frac{z dx dy dz}{[(x - x_0)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad [13],$$

dove θ è l'angolo che la forza dg forma con l'asse verticale delle z .

Integrando infine dg_z sui limiti della struttura in esame, si ottiene l'anomalia gravimetrica relativa alla faglia verticale:

$$\Delta g_{f,z} = G\delta \int_{h_1}^{h_2} z dz \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{[(x - x_0)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

l'integrale in dy è invariante rispetto a y , quindi si ha

$$\begin{aligned} \Delta g_{f,z} &= 2G\delta \int_{h_1}^{h_2} dz \int_0^\infty \frac{z dx}{(x-x_o)^2+z^2} = 2G\delta \int_{h_1}^{h_2} dz \int_0^\infty \frac{\frac{1}{z} dx}{\left(\frac{x-x_o}{z}\right)^2+1} = 2G\delta \int_{h_1}^{h_2} \left[\arctg\left(\frac{x-x_o}{z}\right) \right]_0^\infty dz = \\ &= 2G\delta \int_{h_1}^{h_2} \left[\frac{\pi}{2} + \arctg\left(\frac{x_o}{z}\right) \right] dz = G\delta\pi(h_2-h_1) + 2G\delta \int_{h_1}^{h_2} \arctg\left(\frac{x_o}{z}\right) dz \end{aligned}$$

per risolvere l'integrale in dz si ricorre all'integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \Delta g_{f,z} &= G\delta\pi(h_2-h_1) + 2G\delta \left[z \cdot \arctg\left(\frac{x_o}{z}\right) \right]_{h_1}^{h_2} + \int_{h_1}^{h_2} \frac{x_o \cdot z}{x_o^2+z^2} dz = \\ &= G\delta\pi(h_2-h_1) + 2G\delta \left[h_2 \cdot \arctg\left(\frac{x_o}{h_2}\right) - h_1 \cdot \arctg\left(\frac{x_o}{h_1}\right) \right] + 2G\delta \left(x_o \ln \sqrt{x_o^2+z^2} \right)_{h_1}^{h_2} \end{aligned}$$

In definitiva l'anomalia gravimetrica relativa ad una faglia verticale con rigetto (h_2-h_1) è:

$$\Delta g_{f,z} = G\delta\pi(h_2-h_1) + 2G\delta \left[h_2 \cdot \arctg\left(\frac{x_o}{h_2}\right) - h_1 \cdot \arctg\left(\frac{x_o}{h_1}\right) + x_o \ln \left(\sqrt{\frac{x_o^2+h_2^2}{x_o^2+h_1^2}} \right) \right] \quad [14].$$

Più in generale, se x è la coordinata lungo l'asse delle x del punto di osservazione P e x_F quella del piano verticale che compone la faglia, si ha:

$$\Delta g_{f,z} = G\delta\pi(h_2-h_1) + 2G\delta \left\{ h_2 \cdot \arctg\left(\frac{x-x_F}{h_2}\right) - h_1 \cdot \arctg\left(\frac{x-x_F}{h_1}\right) + x_o \ln \left[\sqrt{\frac{(x-x_F)^2+h_2^2}{(x-x_F)^2+h_1^2}} \right] \right\} \quad [15].$$

Per quanto riguarda le unità di misura adottate, valgono esattamente le stesse precisazioni viste per l'anomalia della sfera.

L'andamento dell'anomalia lungo l'asse x è riportato nella Fig.17; si osserva che:

- per $x_o \rightarrow -\infty$ l'anomalia tende ad annullarsi;
- per $x_o=0$ l'anomalia si riduce al termine costante presente nella formula

$$(\Delta g_{f,z})_0 = \Delta g_{f,z}(x=0) = G\delta\pi(h_2-h_1) \quad [15];$$

- per $x_o \rightarrow \infty$ l'anomalia tende asintoticamente al suo valore massimo, pari a due volte il termine costante:

$$(\Delta g_{f,z})_{\max} = \Delta g_{f,z}(x \rightarrow \infty) = 2(\Delta g_{f,z})_0 = 2G\delta\pi(h_2-h_1) \quad [16].$$

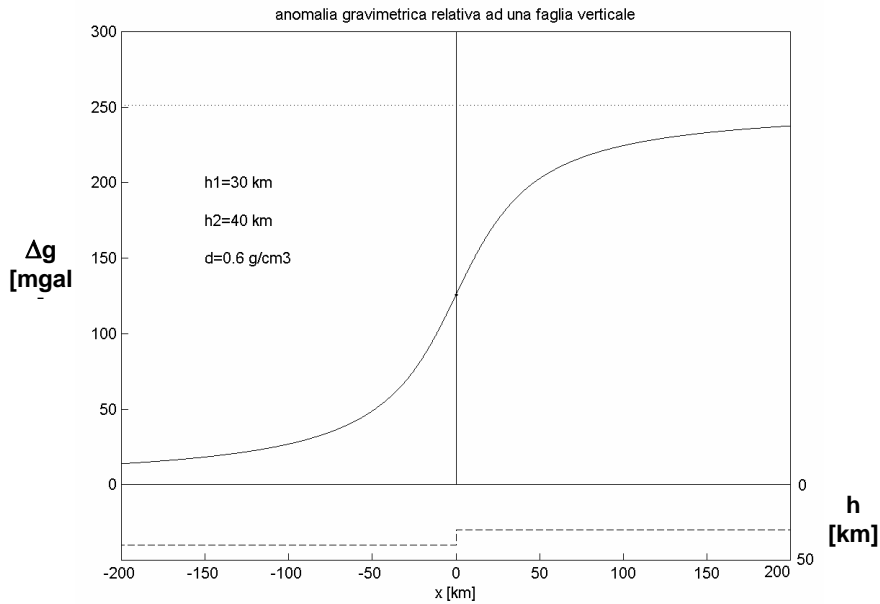


Fig.17 – Anomalia gravimetrica relativa ad una faglia verticale;
per il significato dei simboli si veda il testo

Nella Fig.18 è visualizzato l'effetto combinato delle anomalie prodotte da una faglia verticale ed una massa perturbante sferica.

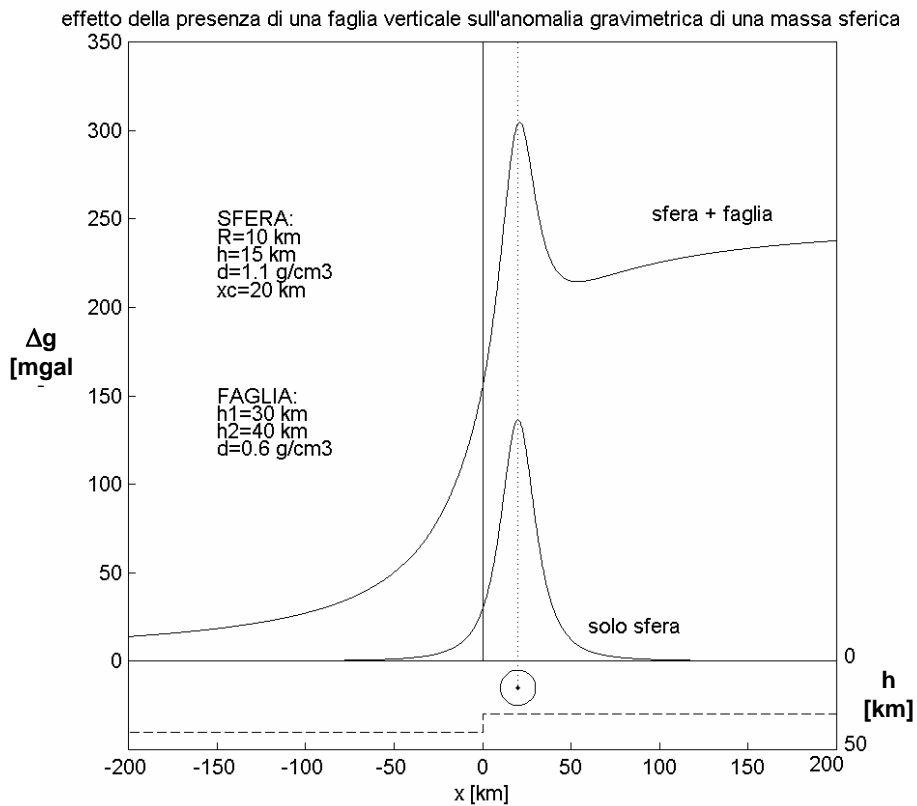


Fig.18 – Effetto della presenza di una faglia verticale sull'anomalia gravimetrica prodotta da una massa perturbante sferica; per il significato dei simboli si veda il testo

3. INTERPRETAZIONE QUANTITATIVA: IL METODO INDIRECTO

Consiste nel ricostruire pezzo per pezzo una struttura simulata che provoca le anomalie trovate sperimentalmente in superficie. Tale studio si fa con reticoli e abachi che si basano sul principio di dividere un piano in zone, ciascuna delle quali da un contributo noto all'anomalia di gravità in un punto (centro del reticolo).

3.1 RETICOLO PER STRUTTURE BIDIMENSIONALI

Un primo tipo di reticolo si adotta nel caso in cui la massa responsabile dell'anomalia sia una struttura bidimensionale, cioè infinitamente estesa secondo una direzione, che supporremo, per comodità, orizzontale (Fig. 19). In questo caso la struttura può essere approssimata mediante un cilindro orizzontale infinitamente esteso nel senso del suo asse: essendo tale cilindro determinato dalla sua sezione retta, il piano normale all'asse del reticolo viene diviso in tante aree elementari (ognuna delle quali reca un contributo "t" o tasso del reticolo) tali che i cilindri indefiniti aventi per direttrici i contorni di tali aree causino uguali anomalie g nel centro del reticolo (fig.20). In tal modo, se n è il numero di tasselli occupato dalla massa in esame, nt sarà l'anomalia generata nel punto O.

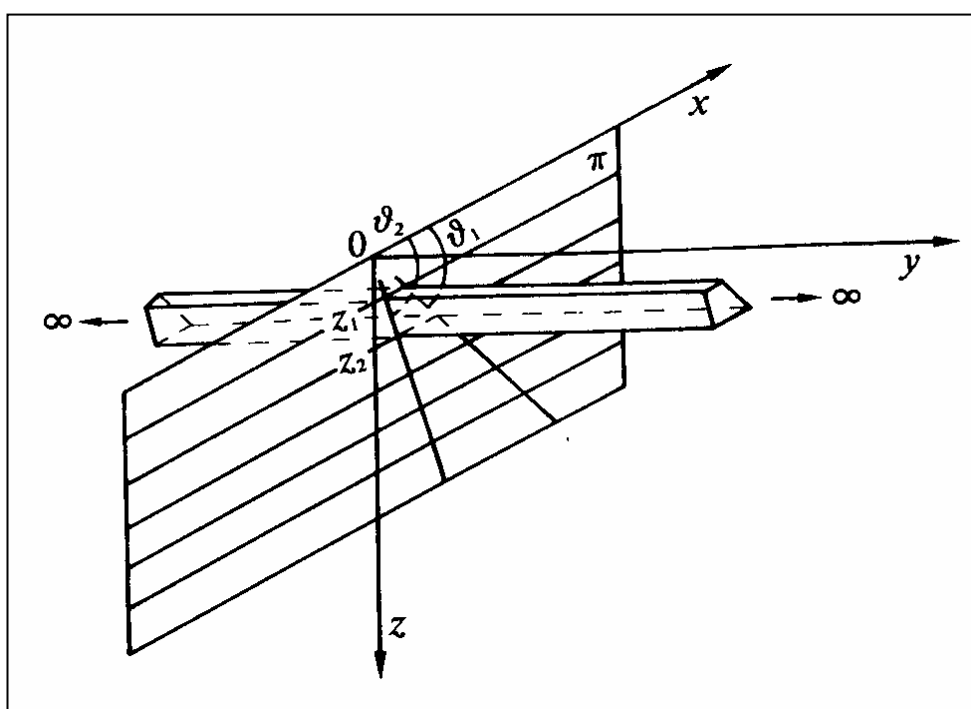


Fig. 19 – Schema per il calcolo del reticolo per strutture bidimensionali (da Norinelli)

Con riferimento alla fig. 19, fissato un sistema di assi ortogonali di origine O, calcoliamo la componente verticale dell'attrazione (cioè l'anomalia gravimetrica) esercitata sull'unità di massa posta in O da un corpo cilindrico (nel senso della geometria analitica) allungato secondo la y .

La componente verticale dg_z esercitata da un elemento di volume $dV=dx dy dz$ di coordinate (x,y,z) e di densità δ , sarà quindi:

$$dg_z = G \frac{\delta dV}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{G\delta z dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad [17],$$

dove G è la costante di gravitazione universale e dx, dy e dz sono appunto le dimensioni infinitesime dell'elemento di volume dV .

L'anomalia gravimetrica dovuta all'intero cilindro è ottenuta integrando questo contributo infinitesimo sui limiti $\Delta x, \Delta y$ e Δz che definiscono il cilindro:

$$\begin{aligned} \Delta g_z &= G\delta \iint_s z dx dz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = 2G\delta \iint_s z dx dz \left| \frac{y}{(x^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right|_0^{\infty} = 2G\delta \iint_s \frac{z dx dz}{x^2 + z^2} = \\ &= 2G\delta \int_{z_1}^{z_2} z dz \int_{\text{ctg}(90-\theta_2)}^{\text{ctg}(90-\theta_1)} \frac{dx}{x^2 + z^2} = 2G\delta(z_2 - z_1)(\theta_2 - \theta_1). \end{aligned}$$

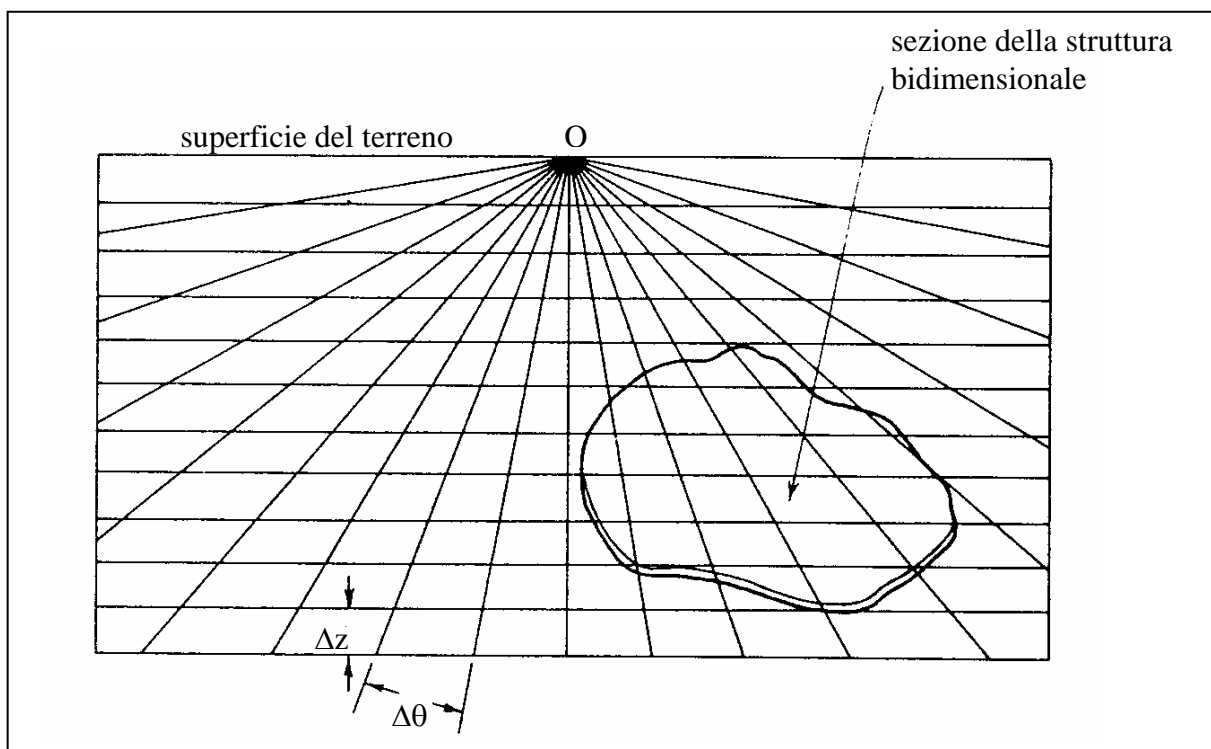
Cioè in definitiva:

$$\Delta g_z = 2G\delta \Delta z \Delta \theta \quad [18],$$

avendo posto $\Delta z = (z_2 - z_1)$ e $\Delta \theta = (\theta_2 - \theta_1)$.

Quest'ultima formula permette di costruire facilmente un reticolo per masse bidimensionali (Fig.20); basta infatti dividere il piano (x,z) in settori limitati da semirette uscenti da O e da rette parallele all'asse x , in modo che $\Delta \theta = \text{costante}$ e $\Delta z = \text{costante}$.

In tale ipotesi l'attrazione esercitata da ognuno dei settori è costante qualunque sia la sua posizione. Se si vuole calcolare in un punto O l'attrazione verticale di una massa bidimensionale orizzontale a sezione qualsiasi, anche irregolare, è sufficiente valutare il numero dei settori ricoprenti la sezione in esame; tale numero deve essere poi moltiplicato per la costante del reticolo, cioè il valore della



densità.

Fig. 20 – Reticolo per strutture bidimensionali (da Telford)

Nella pratica dato un profilo d'anomalia sperimentale, si fanno delle ipotesi sulla struttura perturbante (profondità, densità, forma) e per mezzo del reticolo se ne calcola il profilo gravimetrico, si riportano cioè i punti su una carta millimetrica cercando di realizzare il fitting migliore con la curva dei dati sperimentali.

3.2 RETICOLO PER STRUTTURE NON BIDIMENSIONALI

Nel caso in cui la massa responsabile dell'anomalia non abbia una dimensione maggiore delle altre si adottano altri tipi di reticoli. Per costruirli, si calcola in un punto P il valore di g causata da un solido limitato: due piani orizzontali, compresi tra le profondità z_1 e z_2 ; due piani passanti per la verticale del punto P con azimut φ_1 e φ_2 e due cilindri coassiali aventi per assi la verticale per P e raggi ρ_1 e ρ_2 (fig.21).

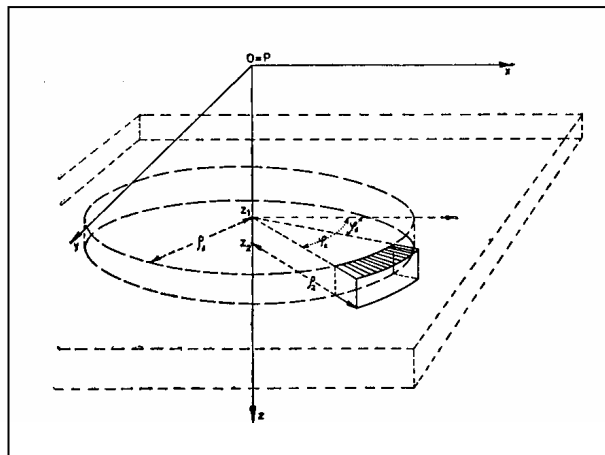


Fig.21 - Schema per il calcolo del reticolo per masse finite (da Morelli)

Si impone che l'attrazione esercitata da ciascuno dei solidi così costruiti al variare di questi parametri e data una certa densità differenziale assuma un valore costante predeterminato.

Il reticolo che ne risulta si presenta sotto forma di più corone circolari, ciascuna delle quali divisa in più settori (fig. 22).

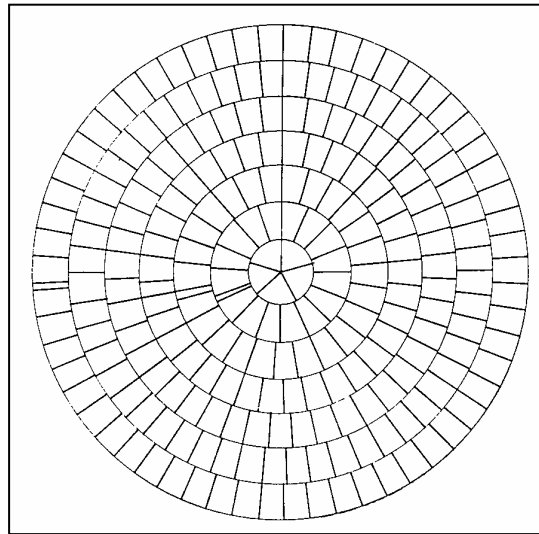


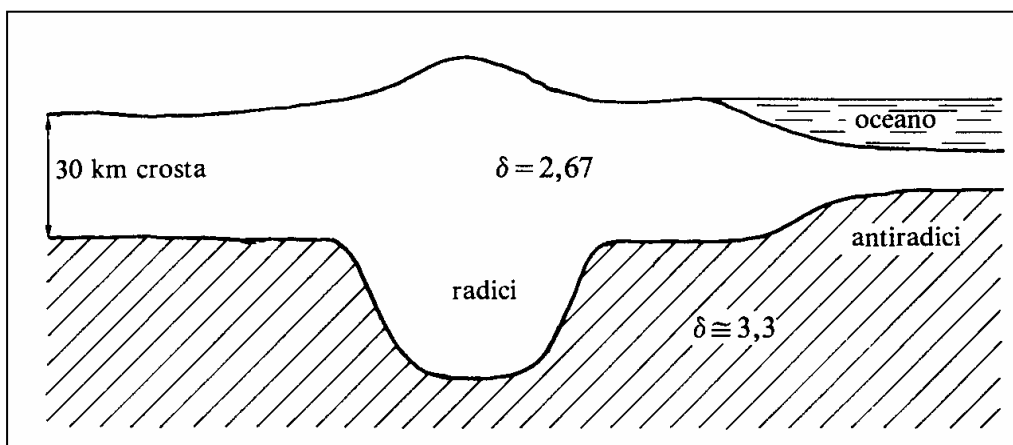
Fig. 22 – Esempio di un reticolo per masse finite, calcolato per $z=200\text{m}$, $z_2 - z_1 = 100\text{ m}$, $\rho_2 - \rho_1 = 100\text{ m}$, $\delta = 0.1\text{ g/cm}^3$; il tasso del reticolo è $t = 10\text{ }\mu\text{Gal}$ (da Morelli)

4. L'ISOSTASIA

Si tratta di un complesso di vecchie teorie nate quando si è tentato di dare una spiegazione al fatto che, allorché si studiano zone della terra molto vaste come gli oceani o le grandi catene montuose, si assista a delle anomalie a carattere regionale piuttosto curiose:

- in corrispondenza dei grandi rilievi montuosi le anomalie di Bouguer sono negative come se al disotto del livello del mare, in corrispondenza dei rilievi tolti, esistesse una zona a densità minore; inoltre la direzione del filo a piombo che per definizione è la verticale, presso le montagne dovrebbe subire una deviazione teorica (rispetto alla normale all'ellissoide) che risulta invece superiore a quella reale.
- in corrispondenza degli oceani le anomalie di Bouguer sono positive, come se ad ogni deficit di massa corrispondesse un eccesso di massa interna.

L'isostasia è una sorta di condizione di equilibrio a cui tende ogni corpo planetario e deriva da una visione dinamica dei comportamenti crostali: si ammette cioè che il mantello, se sottoposto a pressioni prolungate nel tempo, tenda a deformarsi plasticamente comportandosi come un corpo



viscoso. Secondo l'ipotesi di Airy, alle culminazioni montuose corrispondono profonde radici ed inflessioni del mantello mentre al disotto dell'oceano il materiale più denso risale in superficie (antiradici) come se i continenti galleggiassero sul mantello con una parte emersa assai ridotta rispetto alla parte immersa per cui è stato fatto il paragone con gli iceberg galleggianti sull'acqua del mare. Il mantello deve essere quindi più vicino alla superficie in zona oceanica e più distante in zona continentale (fig. 23).

Fig. 23 – Ipotesi di Airy (da Norinelli)

L'elemento comune a tutte le teorie che fanno capo all'isostasia è l'ipotesi che ad una certa profondità si raggiunga un equilibrio cosiddetto isostatico: ad esempio in Scandinavia esiste una forte anomalia negativa probabilmente perché la crosta liberata dal ghiaccio quaternario sta recuperando da alcune migliaia di anni il suo equilibrio e sta tuttora sollevandosi.

Tutto questo fa sì che nei rilievi gravimetrici di regioni particolarmente estese la riduzione di Bouguer non sia più sufficiente ma si debba aggiungere una riduzione compensativa o riduzione isostatica che tenga conto dell'eccesso o del difetto di massa aggiungendo masse compensatrici all'interno nel caso di catene montuose e togliendo le masse in eccesso che stanno al di sotto nel caso degli oceani. In pratica, dopo la riduzione di Bouguer, che ha eliminato l'effetto del rilievo, si immagina che la radice leggera sottostante venga sostituita da un ugual volume avente la densità del substrato, cosicché la crosta leggera si configura come una lastra di densità e spessore uniformi. A prescindere dal modo con cui tale riduzione può essere calcolata, una volta fatta questa ulteriore correzione le anomalie isostatiche dovrebbero essere nulle nella situazione di equilibrio isostatico: forti anomalie possono significare una situazione di equilibrio non raggiunto. Così:

- ad anomalie isostatiche positive corrisponde l'esistenza di masse che devono essere ulteriormente compensate: il materiale superiore si trova più vicino alla superficie di quanto non dovrebbe e quindi questa zona dovrebbe abbassarsi per raggiungere l'equilibrio;
- ad anomalie isostatiche negative corrisponde invece la tendenza della crosta ad innalzarsi.

Il limite dell'isostasia stanno nel fatto che non sempre le masse compensatrici ipotizzate corrispondono a strutture geologiche effettivamente esistenti per cui questi fenomeni andrebbero forse visti nell'ottica di una dinamica più ampia.