GRAVIMETRIA PARTE I:
MOTI DELLA TERRA
GRAVITA' TERRESTRE E GEOIDE

Corso di Geofisica Ambientale e Applicata

Anno Accademico 2003-2004

Prof.ssa Gabriella Losito

Revisione: Ing. Rossana Angelini

1. CAMPO GRAVITAZIONALE

E' noto che la legge di gravitazione universale, formulata da Newton nel 1687, ci fornisce la forza d'attrazione che si esercita tra due masse supposte puntiformi m e M poste a distanza r:

$$\overline{F} = G\frac{Mm}{r^2}\,\text{vers}\,\overline{r} \qquad [1],$$

dove G è la costante di gravitazione universale che nel sistema c.g.s. vale $6.672 \cdot 10^{-8}$ cm^3 g^{-1} s^{-2}
e nel S.I. vale $6.672 \cdot 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}.

Da questa formula è possibile ottenere l'espressione del potenziale prodotto in un punto generico P(x,y,z) da una massa M, posta in un punto Q(a,b,c) usando come massa esplorante in P una massa unitaria (m=1). Sarà allora

$$\left|\overline{F}\right| = \left|\overline{g}\right|$$

e le componenti cartesiane di $\overline{g}$ risultano :

$$g_x = G\frac{M}{r^2}\cdot\frac{a-x}{r} \;;\; g_y = G\frac{M}{r^2}\cdot\frac{a-y}{r} \;;\; g_z = G\frac{M}{r^2}\cdot\frac{a-z}{r}.$$

Poiche' $r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$, la sua derivata rispetto ad x vale :

$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2(x-a) \;;$$

quindi si ottiene $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2(x-a)}{2r}$; $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{(x-a)}{r}$

d'altra parte varrà anche :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{(x-a)}{r} \;;\; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x-a}{r^3}.$$

Le componenti cartesiane di $\overline{g}$ risultano dunque :

$$g_x = GM\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \;; \qquad g_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{GM}{r}\right)$$

$$g_y = GM\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) \;; \qquad g_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{GM}{r}\right)$$

$$g_z = GM\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \;; \qquad g_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{GM}{r}\right)$$

<u>L'argomento fra parentesi</u> e' proprio il POTENZIALE generato dalla massa M in un punto P posto a distanza r dalla massa stessa:

$$U_{(x,y,z)} = \left(\frac{GM}{r}\right) \qquad [2].$$

In conclusione quindi si può scrivere:

$$g_x = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$g_y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad [3];$$

$$g_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

U rappresenta una superficie equipotenziale. Il campo gravitazionale e' orientato verso potenziali crescenti ed e' perpendicolare ad una superficie equipotenziale.

$$U_{(x,y,z)} - U_0 = 0.$$

La relazione [1] continua a valere per ogni corpo di forma sferica posto all'esterno della "superficie" che racchiude le masse, o a strati sferici concentrici omogenei: in tal caso la distanza r che compare nella relazione, è da intendersi come distanza tra i centri di massa dei due corpi. Così, ad esempio, la terra e la luna dal punto di vista della mutua attrazione si comportano come se la loro massa fosse concentrata nel centro di massa, inoltre il SOLE e la LUNA interagiscono con la massa terrestre in modo continuo nel tempo, ma variabile nello spazio e producono variazioni del campo gravitazionale terrestre in modo apprezzabile sia mediante osservazioni indirette (maree), sia mediante misure dirette della gravità.

Masse astrali quali pianeti del Sistema Solare interagiscono debolmente con il campo gravitazionale terrestre, alterazioni della gravità possono essere anche prodotte da "passaggi" di comete.

2. MOTI DELLA TERRA

2.1 ROTAZIONE

La terra ruota intorno al proprio asse con velocità $\omega = 73 \cdot 10^{-6}$ rad s^{-1}, (465 m/s all'equatore) ed impiega per una rotazione completa T_d = 23h 56' 04''. Il moto risulta essere perturbato da:

- cause secolari, dovute all'attrito delle onde del mare sulla crosta terrestre
- cause meteorologiche, dovute all'attrito delle masse di aria sulla crosta terrestre

2.2 RIVOLUZIONE

La Terra inoltre ruota intorno al Sole con un periodo di rivoluzione T_r = 365d 4h 9'26''. A causa dell'ellitticità della sua orbita di rivoluzione varia la distanza dei centri di massa Terra – Sole:

$D_{media} = 150 \cdot 10^9$ m

$D_{Afelio} = 152 \cdot 10^9$ m

$D_{Perielio} = 147 \cdot 10^9$ m

In base alla II legge di Keplero (conservazione del momento angolare) si osservano le diverse velocità:

Velocità all'Afelio $V_A = 29.274$ km/s

Velocità al Perielio $V_P = 30.268$ km/s

Velocità media $V_m = 29.263$ km/s

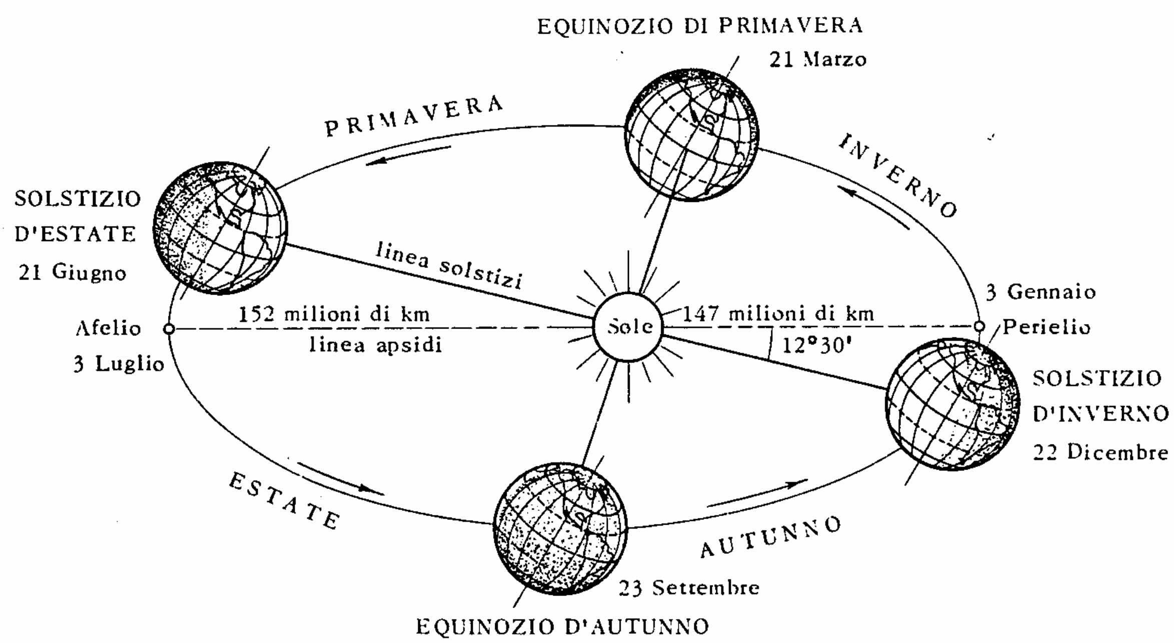

Fig. 19. - La rivoluzione della Terra intorno al Sole (Stagioni riferite all'emisfero boreale).

Fig.1 – La rivoluzione della Terra intorno al Sole; le stagioni sono riferite all'emisfero boreale [da Vialli]

2.3 PRECESSIONE DEGLI EQUINOZI

La Precessione degli Equinozi PE, è prodotta dall'ATTRAZIONE SOLARE agente in modo diverso sulle "masse" che compongono la Terra (in questo caso la massa terrestre non si considera

concentrata in un unico punto). La PE produce l'oscillazione dell'asse terrestre attorno al suo centro e lo schiacciamento polare.
La PE ha un periodo T_{PE} = 25800 anni.

2.4 NUTAZIONE

La Nutazione è causata dalla azione differenziata della LUNA sulle masse terrestri e dalla ELLITTICITA' dell'orbita terrestre.
La Nutazione produce piccole oscillazioni dell'asse terrestre, che si sovrappongono alla Precessione degli Equinozi; il suo periodo è T_N = 18.5 anni.

2.5 TRASLAZIONE DEL SISTEMA SOLARE (TSS)

La TSS, avviene verso la costellazione di ERCOLE e della LYRA con velocità V_{TSS} = 600 km/s.

2.6 POLODIA (PO)

La polodia è lo spostamento dei poli prodotto dalle OSCILLAZIONI LIBERE DELLA TERRA; questo spostamento è caratterizzato da un periodo T_{PO} = 430 giorni.

3. GRAVITA' TERRESTRE E GEOIDE

Un corpo che si trova sulla superficie terrestre è partecipe esso stesso del moto della terra: su di esso agiranno, oltre alla forza di gravitazione universale dovuta alla massa propria della terra, anche le cosiddette forze apparenti, dovute alla non inerzialità del sistema di riferimento terrestre.
La più importante tra queste è la forza centrifuga, causata dalla rotazione della terra attorno al proprio asse, che avviene con velocità $\omega = 73 \cdot 10^{-6}$ rad s^{-1}.
La forza di gravità agente su una massa unitaria (m=1) posta nel punto P(x,y,z) sulla superficie della terra, si può definire come la risultante di (Fig.2):

- l'attrazione Newtoniana $\overline{F_g}$ di tutti i punti che costituiscono la massa della Terra, diretta secondo la congiungente il punto con il centro di massa della terra (CM) e il cui modulo vale:

$$F_g = \frac{GM_T}{R^2} \qquad [4],$$

dove G è la costante di gravitazione universale, M_T è la massa della terra e R è il raggio della Terra (che per ora supponiamo sferica);

– la componente $\bar{f}$ della forza centrifuga $\bar{f}_c$ diretta sempre secondo la congiungente il punto con CM, il cui modulo vale:

$$f = f_c \cos(\varphi) = (\omega^2 d)\cos(\varphi) = [\omega^2 R\cos(\varphi)]\cos(\varphi) = \omega^2 R\cos^2(\varphi) \qquad [5],$$

dove φ è la latitudine geocentrica (l'angolo al centro della terra compreso tra la congiungente il punto P e il piano equatoriale), d è la distanza dall'asse di rotazione, R è il raggio della terra; questa componente si può ritenere indipendente dal tempo solo in prima approssimazione, a causa delle perturbazioni a cui è soggetto il moto rotatorio della terra.

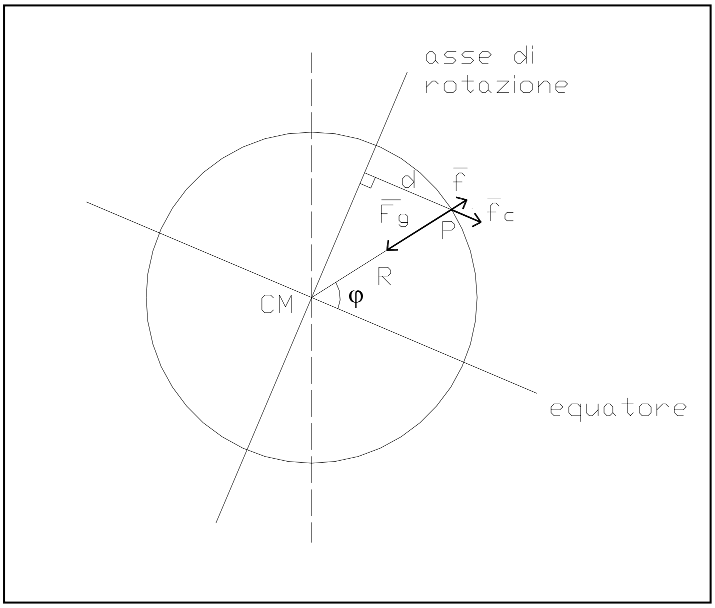

Fig. 2 – Componenti della forza di gravità; per il significato dei simboli si veda il testo

La direzione della forza di gravità, individuata dalla direzione del filo a piombo, è per definizione la verticale. L'accelerazione che compete alla forza di gravità si indica con "g". Nel sistema c.g.s. l'unità di misura è il gal = 1 cm s^{-2}, mentre nel sistema SI l'unità di misura per g è: m s^{-2}; una unità di misura molto usata è la g.u. = 1μm s^{-2}.

L'intensità della g è quindi data da:

$$g = G\frac{M}{R^2} - \omega^2 R\cos^2\Phi \qquad [6],$$

dove Φ è la latitudine geografica, che nella formula sostituisce quella geocentrica senza alterare l'ordine di approssimazione.

Si dimostra che il campo dell'accelerazione di gravità terrestre è conservativo.

E' quindi possibile definire una funzione scalare della posizione detta *potenziale terrestre gravitazionale* U, il cui gradiente è proprio l'accelerazione di gravità stessa.

Tale potenziale può essere scritto come:

$$U = \left(\int_{V_{terra}} \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2 d^2}{2} \right) \qquad [7],$$

dove V_{terra} è il volume della terra ed il significato degli altri simboli è illustrato in Fig. 3.

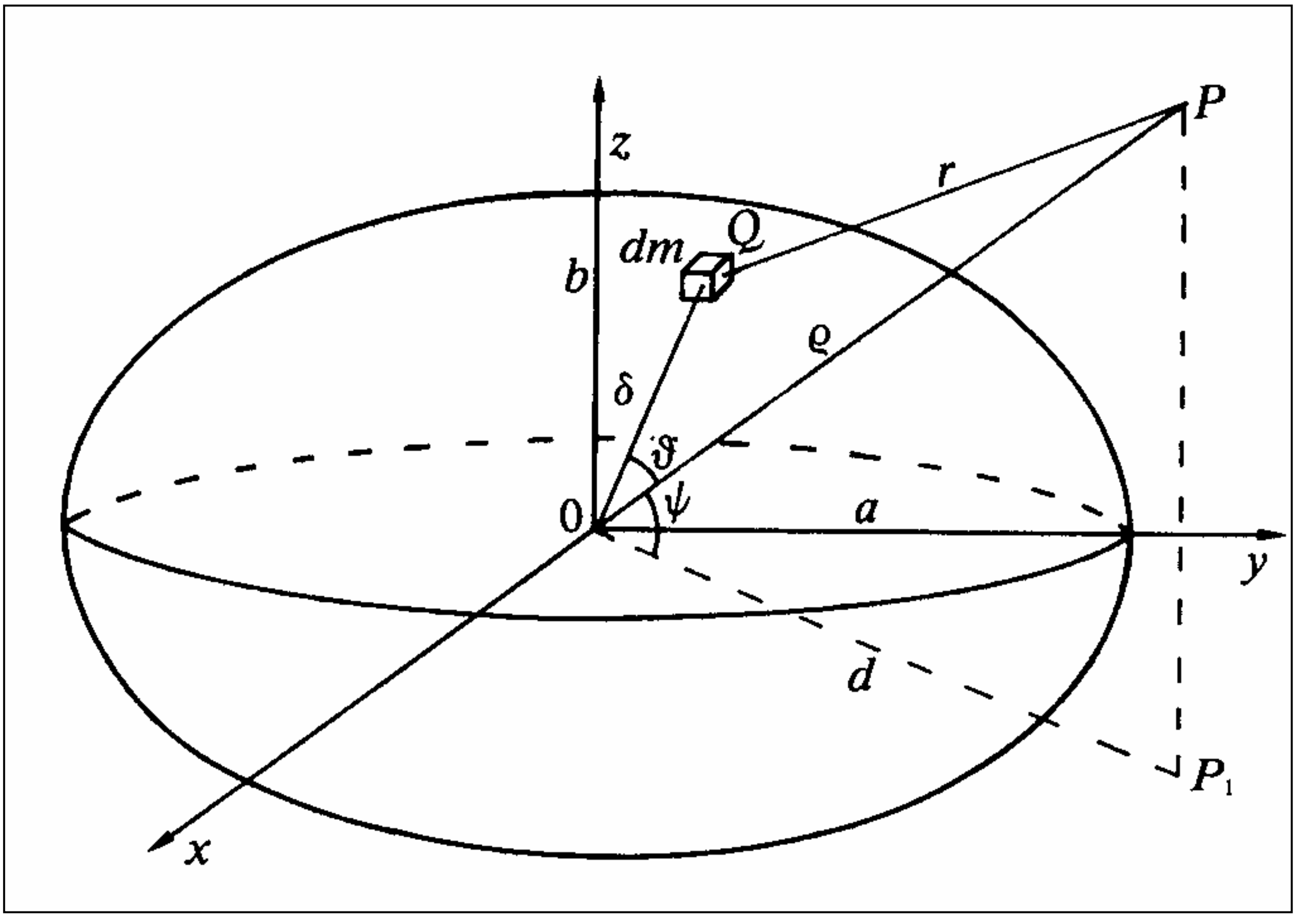

Fig.3 – L'ellissoide di rotazione terrestre [da Norinelli]

Le superfici su cui la funzione potenziale è costante sono dette *superfici equipotenziali* e sono definite dalla condizione di essere in ogni punto perpendicolari alle linee di forza (infatti il gradiente è sempre ortogonale alle superfici di livello).
Si dimostra che le superfici equipotenziali hanno in prima approssimazione una forma ellissoidica e non hanno punti di intersezione.
La necessità di dare una forma matematica alla superficie terrestre ha portato all'introduzione del Geoide, che è la superficie equipotenziale di riferimento che passa per il Livello Medio Marino (l.m.m.) in un determinato luogo, in una determinata epoca. Il l.m.m. di un punto è ottenuto calcolando la media dei valori misurati con mareografi per un intervallo di tempo sufficientemente lungo: ciò consente di tenere conto delle variazioni locali, sia periodiche che non.
Il geoide è una superficie di individuazione estremamente complicata poiché risente di tutte le masse topografiche esterne all'ellissoide (sotto i rilievi esso si innalza e, viceversa, si abbassa in corrispondenza delle depressioni, fig. 4) e anche delle variazioni di densità interne, quindi è per noi esageratamente difficile da conoscere. Tuttavia è importante avere una superficie di riferimento che ci consenta di quotare e rappresentare i punti della superficie terrestre.

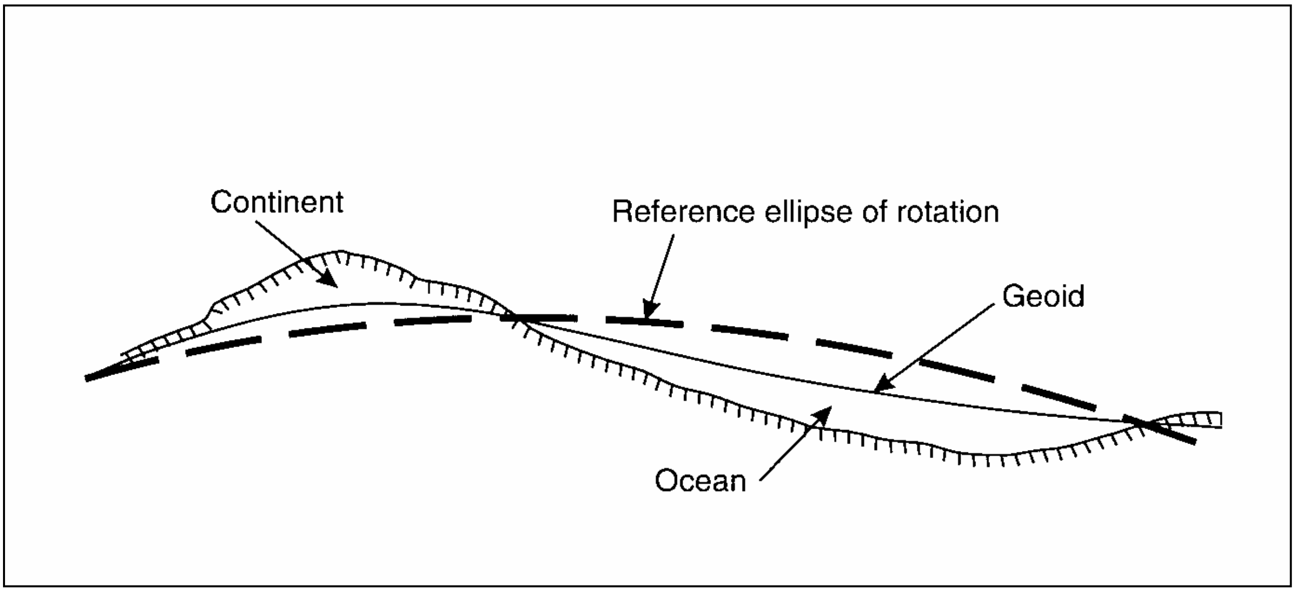

Fig.4 – Confronto tra geoide ed ellissoide di rotazione (da Reynolds)

A seconda dell'approssimazione, che si vuole ottenere, si utilizzano (Fig.5):
- la sfera di raggio pari al raggio medio terrestre, R= 6371 km.
- un ellissoide di rotazione schiacciato ai poli individuabile attraverso due parametri:
  a = semiasse maggiore o equatoriale,
  b = semiasse minore o polare

con i due parametri ausiliari

$s = \frac{a-b}{b}$, schiacciamento

$\frac{dg_z}{d\varphi} \cong 51851\,\mathrm{sen}(\varphi)$ con e definita eccentricità;

è interessante sottolineare che, se la terra fosse un sistema di masse omogeneo ed isotropo, la sua superficie sarebbe proprio un ellissoide di rotazione.

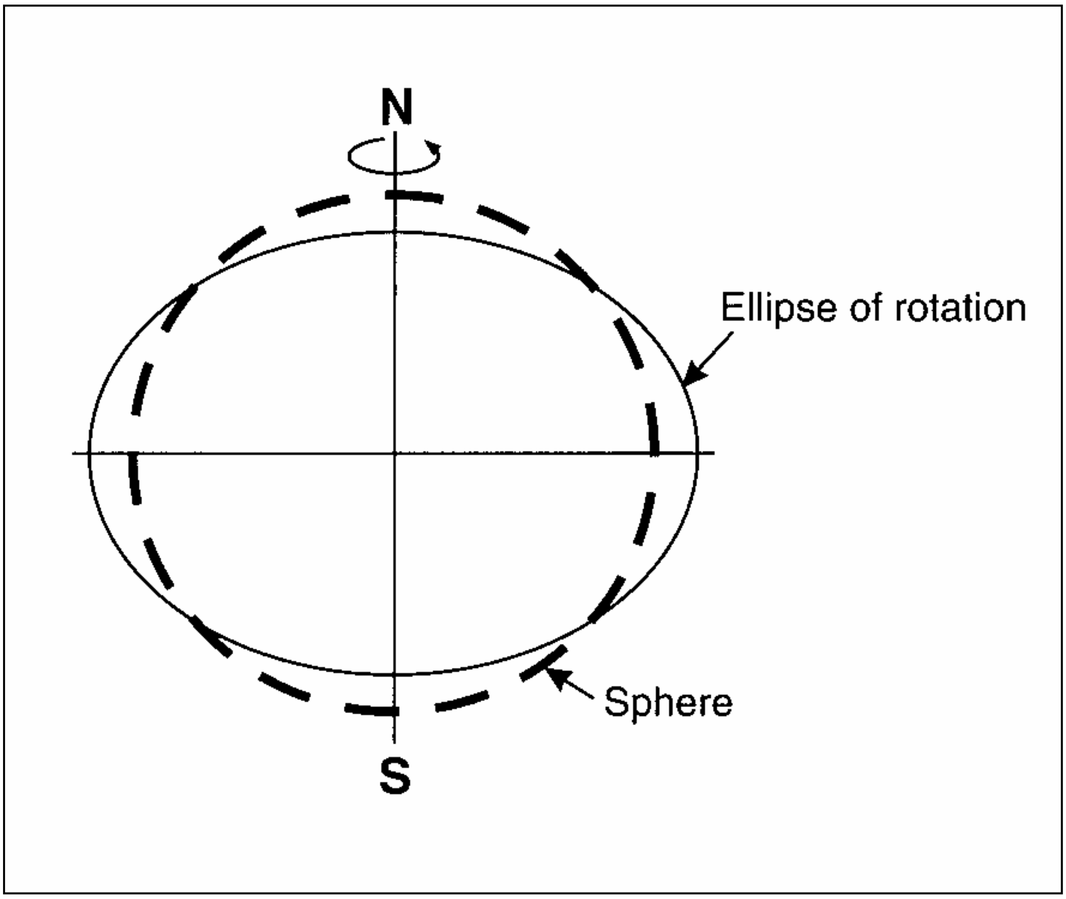

Fig.5 – Differenza esagerata tra una sfera e un ellissoide di rotazione (da Reynolds)

L'IGM ha scelto per la costruzione dei fogli 1:100.000 l'ellissoide di Bessel con a = 6377397 m e $s = \frac{1}{299.2}$, un ellissoide a tre assi in cui l'equatore non è più un cerchio ma un'ellisse.

Nelle applicazioni geodetiche e geofisiche è normalmente usato un ellissoide di rotazione proposto da Hayford nel 1909, individuato dai parametri a = 6378388 m e $g_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{GM}{r}\right)$; questo è stato assunto nel 1924 come ellissoide internazionale di riferimento dall'U.G.G.I.

Tuttavia l'ellissoide così definito non è una superficie equipotenziale, se non nel caso puramente teorico in cui il corpo terrestre sia supposto omogeneo.

Il vantaggio che una superficie del genere comporta è però quello di essere estremamente semplice: per questo motivo sono state sviluppate su di esso tutte le formule della geodesia operativa e si è assunto come superficie di riferimento per il vettore di gravità.

La **formula, praticamente usata per la determinazione della gravità normale sull'ellissoide internazionale**, ha la seguente forma:

[8],

dove Φ(rad) è sempre la latitudine geografica. La g_0 fornita dalla formula è in c.g.s. e riproduce i valori assoluti di gravità misurati a livello del mare con uno scarto di 1μm/s² .

I valori normali, teorici, così calcolati andranno confrontati con i valori osservati e convenientemente ridotti, onde avere un criterio per dedurre le anomalie.

La forza di gravità è stata definita come risultante di due forze indipendenti dal tempo ma il valore della g misurata è influenzato anche da forze dipendenti dal tempo di cui bisogna conoscere il contributo:

- forze agenti a lungo periodo, derivanti sia da spostamenti di masse interne che esterne (non hanno importanza dal punto di vista pratico);
- forze agenti a breve periodo, derivanti dalla non uguale attrazione dei corpi celesti nel tempo, in particolare dalle variazioni di attrazione in un punto della terra esercitate dal Sole (per la grande massa) e dalla Luna (per la sua vicinanza).

Queste ultime danno origine ad una variazione diurna dell'intensità della gravità sulla superficie terrestre chiamata sinteticamente *marea gravimetrica* (Fig.6) , che si traducono in spostamenti sia delle masse liquide (maree in senso tradizionale, ossia spostamenti dell'acqua di oceani, mari, laghi), che delle masse solide (maree terrestri). L'ordine di grandezza del valore massimo di questa marea gravimetrica è di 0.1 mgal.

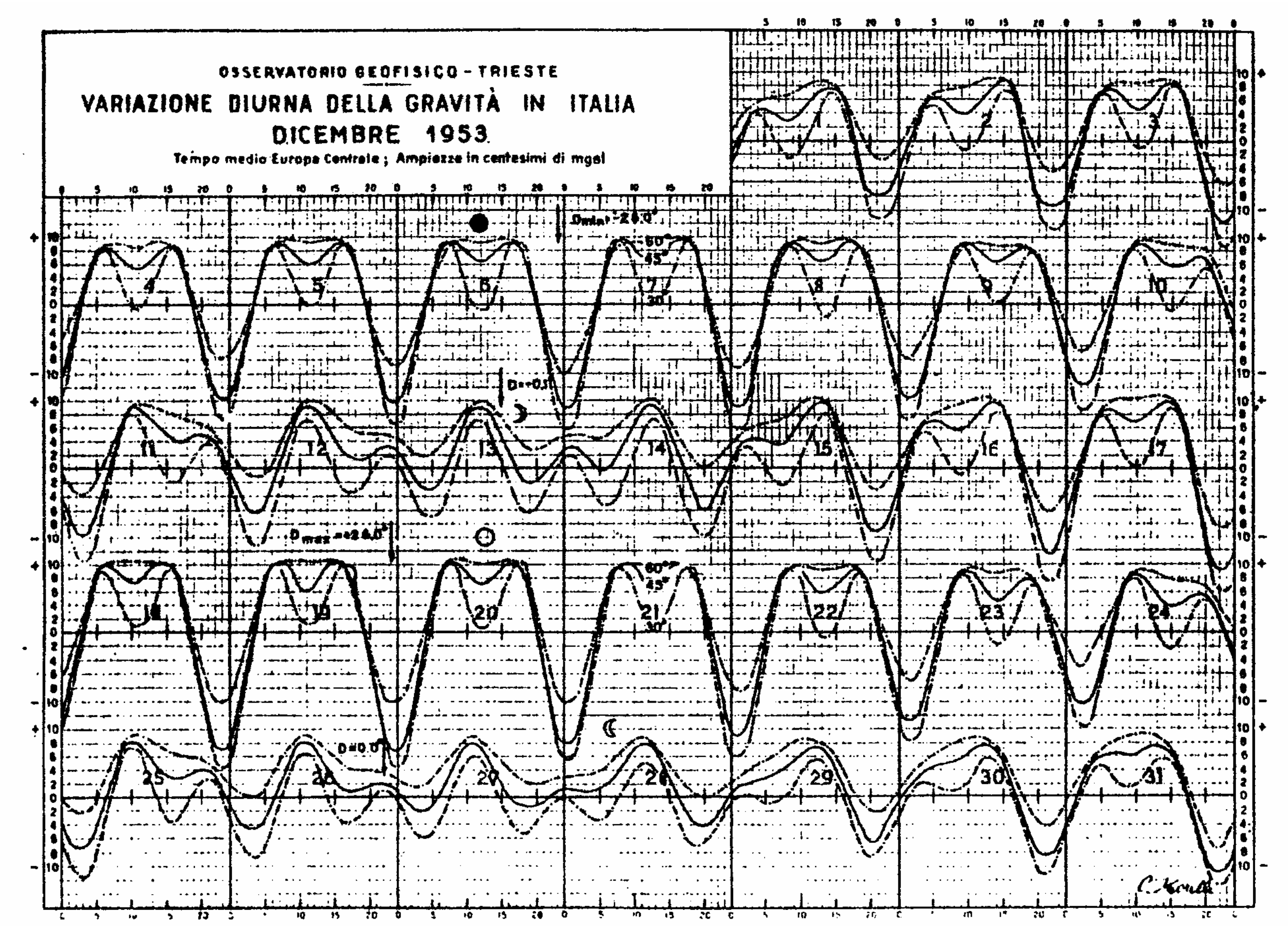

Fig. 6 – Variazione diurna della gravità in Italia; l’unità di misura è il centesimo di mgal (da Morelli)

Sappiamo che le forze di marea sono una conseguenza della variazione nel tempo dell'attrazione esercitata dalla Luna e dal Sole sul punto di misura terrestre. Tuttavia è più importante l'effetto attrattivo della Luna a causa della sua vicinanza con la Terra (il rapporto tra forza di attrazione Luna - Terra e Sole - Terra è di 2.2:1). Utilizzando un modello semplificato, consideriamo la Terra ricoperta da un velo d'acqua di uniforme profondità, ed il sistema Terra – Luna in equilibrio meccanico, mentre i due corpi celesti compiono un moto di rivoluzione intorno all'asse che passa per il centro di massa del sistema, il quale si trova all'interno della superficie terrestre, a circa 1600 km di profondità. Quando i due corpi ruotano intorno al centro del sistema, entrano in gioco due forze: la forza di reciproca attrazione gravitazionale e la forza centrifuga. La forza di attrazione lunare (vedi Fig.7) sarà massima nel punto A, più vicino alla Luna, e minimo nel punto B, agli antipodi di A; la forza centrifuga invece sarà massima in B, lontano dal centro di rotazione del sistema, e minima in A, vicino a tale punto. Componendo le due forze in ogni punto si avranno delle forze risultanti di cui, quella in A è rivolta verso la Luna, perché prevale la forza di attrazione, mentre in B è rivolta in senso opposto perché prevale la forza centrifuga. In conseguenza di ciò si ha un accumulo di acqua lungo l'asse A – B e un abbassamento di livello lungo l'asse ad esso ortogonale; la superficie del mare tende ad avere una forma ellissoidale il cui asse maggiore passa per la congiungente Terra – Luna.

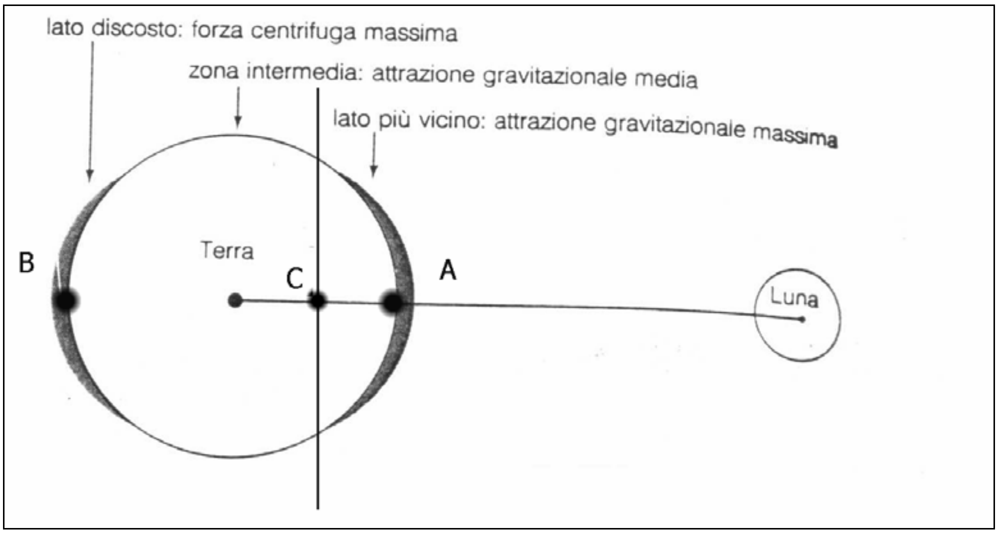

Fig. 7 – Variazione del baricentro del sistema Terra-Luna [da Braitenberg]

Nonostante che molteplici siano i contributi che influenzano il valore della g misurata, quello dovuto all'attrazione newtoniana della massa terrestre è di gran lunga il più importante. Se supponiamo la Terra sferica con R = 6378 km e g = 980 gal, si può stimare un valore medio della densità terrestre pari a 5.52 g/cm^3 corrispondente al doppio della densità media delle rocce della crosta uguale a 2.67 g/cm^3. Bisogna supporre quindi che esista una distribuzione concentrica di masse a densità crescente con la profondità.. Lo studio della distribuzione della velocità delle onde sismiche ha evidenziato varie superfici di discontinuità (vedi Fig.8):

- sup. MOHO, discontinuità tra crosta e mantello a profondità variabile tra 5 km (per la crosta oceanica) e 70 km (per la crosta continentale in corrispondenza delle montagne);
- sup. di WIECHET – GUTENBERG, discontinuità tra mantello e nucleo esterno a circa 2900 km di profondità;
- sup. di discontinuità tra nucleo esterno ed interno a circa 5150 km.

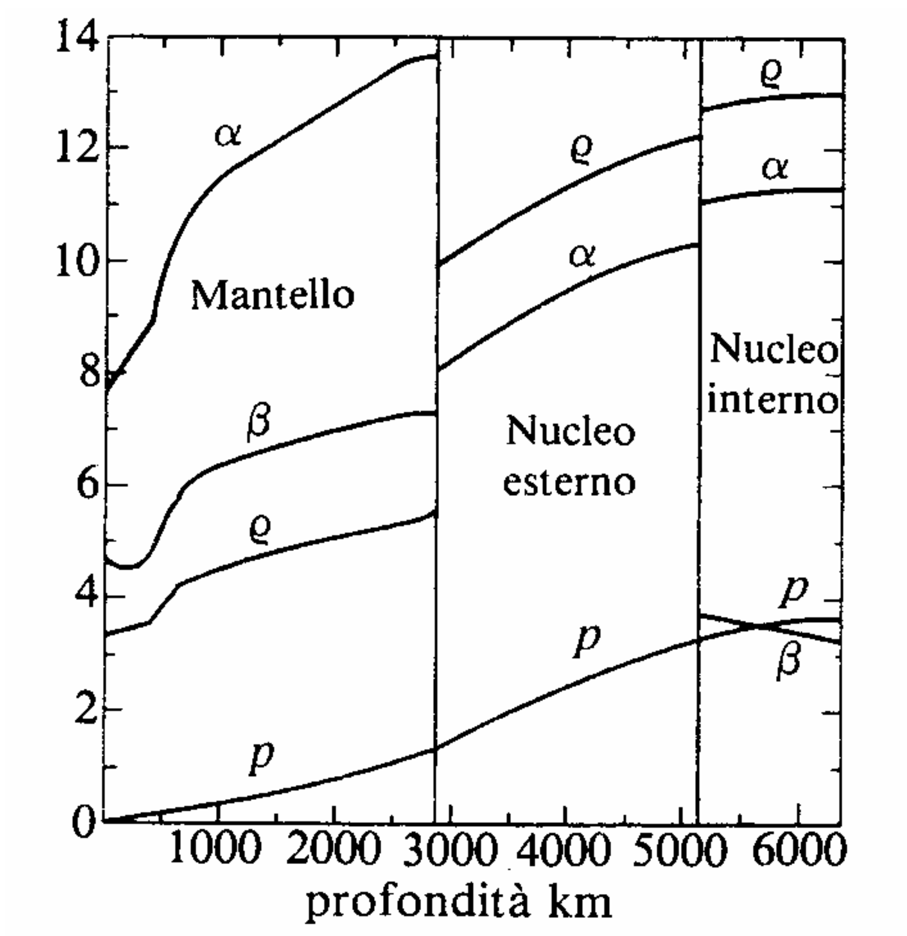

Fig.8 - Distribuzione all'interno della Terra, in funzione della profondità (km), di: densità ρ(g/cm^3), pressione p(10^{11} N/m^2); velocità α e β (km/s) delle onde P e S [da Norinelli]