Spazi di funzioni

Nelle scienze geografiche, e in particolare in geodesia, vengono studiate delle grandezze fisiche funzioni di punto sulla superficie terrestre, ad esempio il campo della gravità o l'ondulazione del geoide. Queste funzioni sono in linea di principio definite in ogni punto, e quindi su un continuo, e possono quindi essere applicate ad esse le regole del calcolo infinitesimale; tuttavia, in genere sono misurate e quindi sono note soltanto su un numero finito di punti, e quindi, per essere rappresentate nella loro globalità, devono essere determinate per interpolazione. Tutte le tecniche di interpolazione, tuttavia, comportano un certo grado di arbitrarietà, e in ogni caso richiedono che la funzione interpolante venga scelta in una classe ristretta, in generale definita da un numero limitato di parametri da stimare. Un procedimento naturale è quello di imporre che la funzione cercata sia combinazione lineare di un numero finito di funzioni opportunamente scelte (*funzioni di base*). Ovviamente questa scelta è giustificata se si ritiene che l'insieme delle funzioni fra le quali si compie la scelta sia completamente rappresentato o adeguatamente approssimato da tali combinazioni.

Il primo problema che ci si pone è quindi quello della *rappresentazione* e dell'*approssimazione*.

Si sceglie una sequenza di funzioni di base $\{\varphi_n(t)\}$ (non necessariamente in numero finito), e in prima istanza si considerano le loro combinazioni lineari finite $f(t)=\sum^N f_n\varphi_n(t)$. Si stabilisce quindi una corrispondenza fra la funzione $f(t)$ definita nel continuo e gli N coefficienti f_n . D'altra parte, se le funzioni di base sono in numero infinito, può accadere che una certa funzione $f(t)$ non sia rappresentabile esattamente come combinazione lineare finita, ma sia approssimabile sempre meglio (secondo un criterio da specificare) da una sequenza di combinazioni lineari finite con un numero di termini indefinitamente crescente. Allora si capisce che ha un senso non porre un limite al numero delle funzioni di base, anche se in pratica i calcoli numerici richiedono l'uso di combinazioni lineari finite.

L'esempio classico di situazione di questo tipo è lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile nell'intervallo $[-\pi,\pi]$: $\left\{f(t) \;\middle|\; \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt<\infty\right\}$. Questo spazio è solitamente indicato con $L^2([-\pi,\pi])$. Le funzioni di base scelte sono $\{1,\sin nt,\cos nt \mid n\in\mathbf{N}\}$. Il criterio scelto per valutare la qualità dell'approssimazione è la *media quadratica degli scarti*: $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)-\sum f_n\varphi_n(t)|^2\,dt$. Le proprietà di questa rappresentazione sono descritte dalla teoria delle *serie di Fourier*.

Il risultato fondamentale è il seguente:

data $f\in L^2([-\pi,\pi])$, e posto $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$, allora

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t)-\left(\tfrac{1}{2}a_0+\sum_1^N a_n\cos nt+\sum_1^N b_n\sin nt\right)\right|^2 dt=0 .$$

D'altra parte, fissato N , si verifica che la scelta dei coefficienti a_n, b_n vista sopra è quella che rende minimo $\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - \left(\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^N a_n \cos nt + \sum_1^N b_n \sin nt \right) \right|^2 dt$.

La dimostrazione di quest'ultima proprietà si basa sulle seguenti uguaglianze di grande importanza per il seguito:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos kt dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin kt dt = \pi \delta_{nk} \quad ; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \sin kt dt = 0 .$$

Si può verificare che esistono funzioni in $L^2([-\pi, \pi])$ (per esempio $f(t) = t$) che hanno infiniti coefficienti a_n, b_n non nulli. Di conseguenza esse non sono esprimibili come combinazioni lineari finite delle funzioni di base, ma sono approssimabili da tali combinazioni con scarti in media quadratica arbitrariamente piccoli. Di conseguenza esse possono essere interpretate come somma della serie: $f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos nt + \sum_1^{\infty} b_n \sin nt$ nel senso della convergenza in media quadratica.

NOTA: la convergenza in media quadratica non implica convergenza puntuale in tutti i punti.
Si consideri ad esempio la successione $\left\{ g^{(n)}(t) = \sqrt{n} \exp\left(-\frac{1}{2} n^4 t^2\right) \right\}$ in $[-1,1]$.

$$\int_{-1}^{1} g^{(n)2}(t) dt = \int_{-1}^{1} n \exp(-n^4 t^2) dt = \frac{n}{n^2} \int_{-n^2}^{n^2} e^{-u^2} du < \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \to 0 \text{ , mentre } \lim_{n \to \infty} g^{(n)}(0) = +\infty .$$

La successione quindi tende a 0 in media quadratica, ma in 0 diverge.

Nel seguito i risultati sopra enunciati vengono riesaminati in una formulazione più generale e più astratta, che consente di darne un'illustrazione più esauriente.

Spazi di Hilbert

Premessa: come è noto, in $\mathbf{R}^n$ è definito il prodotto scalare: $v, w \mapsto (v, w) \equiv \sum v_i w_i$. Questa operazione verifica le seguenti proprietà:

i) $(v, v) \geq 0$; $(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

ii) $(v, w) = (w, v)$

iii) $(\lambda v, w) = \lambda (v, w)$

iv) $(v_1 + v_2, w) = (v_1, w) + (v_2 + w)$

Si definisce *norma* del vettore v l'espressione $\|v\| = (v, v)^{1/2}$. Segue che:

i) $\|v\| \geq 0$; $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$, ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.

Vale la *disuguaglianza di Schwarz*: $|(v, w)| \leq \|v\| \|w\|$, da cui segue la *disuguaglianza triangolare* : $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (e anche $\left| \|v\| - \|w\| \right| \leq \|v - w\|$). Da quest'ultima disuguaglianza si verifica che, se $v^{(n)} \to v$ (ossia $\|v^{(n)} - v\| \to 0$) , allora $\|v^{(n)}\| \to \|v\|$. Inoltre è anche vero che $v^{(n)} \to v \Rightarrow (v^{(n)}, w) \to (v, w)$ per ogni w : infatti $|(v^{(n)} - v, w)| \leq \|v^{(n)} - v\| \|w\| \to 0$.

Si consideri ora lo spazio lineare delle combinazioni lineari finite di $\{1, \cos nt, \sin nt\}$. Si verifica che per le funzioni di tale spazio l'operazione $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$ soddisfa le proprietà del prodotto scalare.

NOTA: la proprietà $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ è certamente vera per le funzioni di questo spazio, che sono continue, ma non in generale. Per avere integrale nullo basta che la funzione sia nulla *quasi ovunque*, ossia a meno di un insieme di misura nulla (per esempio, un numero finito di punti). Quindi, affinché le proprietà di questo prodotto scalare siano soddisfatte anche in spazi più ampi, che contengano anche funzioni discontinue, bisogna che una funzione non nulla soltanto su un insieme di misura nulla sia identificata con la funzione identicamente nulla. In sostanza, tutte le funzioni che differiscono fra di loro su insiemi di misura nulla vengono messe insieme in una *classe di equivalenza* e considerate come se fossero un'unica funzione. Con questa convenzione, a rigore, non è più possibile definire per una funzione f il valore $f(t)$ in un singolo punto t. Se però in una classe di equivalenza c'è una funzione continua, questa è univocamente determinata con i suoi valori in tutti i punti.

La famiglia $\{1, \cos nt, \sin nt\}$, per quanto visto sopra, è costituita da funzioni mutuamente ortogonali (ossia i loro prodotti scalari sono nulli); la norma è $\sqrt{2\pi}$ per la funzione 1, $\sqrt{\pi}$ per le altre. Dividendo le funzioni per la loro norma si ottengono funzioni normalizzate, ossia di norma 1. La famiglia $\{1/\sqrt{2\pi}, (1/\sqrt{\pi})\cos nt, (1/\sqrt{\pi})\sin nt\}$ costituisce un *sistema ortonormale*.

Sia ora $\{e^{(n)} \mid n = 1, \cdots\}$ un sistema ortonormale costituito da infiniti elementi, sia $\{v_n\}$ una successione reale, e si consideri la successione di vettori $v^{(N)} = \sum^{N} v_n e^{(n)}$.

Innanzitutto si verificano le seguenti proprietà:

i) $\left(v^{(N)}, e^{(k)}\right) = \sum^{N} v_n \left(e^{(n)}, e^{(k)}\right) = v_k$

ii) $\left\|v^{(N)}\right\|^2 = \sum^{N} v_j v_k \left(e^{(j)}, e^{(k)}\right) = \sum^{N} v_j^2$

Ci si chiede ora sotto quali condizioni $\{v^{(N)}\}$ ha limite per $N \to \infty$, ossia esiste v tale che $\lim_{n\to\infty} \left\|v - v^{(N)}\right\| = 0$.

Si ricordi che in tal caso $\left\|v^{(N)}\right\| \to \|v\|$, e quindi condizione necessaria per l'esistenza del limite è che la serie $\sum |v_n|^2$ converga, e $\|v\|^2 = \sum_{1}^{\infty} |v_n|^2$. Quest'ultima uguaglianza è detta *identità di Parseval.*

Non è però detto che la condizione sia anche sufficiente; tutt'al più si può dire che la successione $\{v^{(N)}\}$ è di Cauchy, dato che $\left\|v^{(N)} - v^{(M)}\right\|^2 = \sum_{M+1}^{N} |v_n|^2$, e $\sum |v_n|^2$ converge. In uno spazio astratto di dimensione infinita, tuttavia, la condizione di Cauchy non è sufficiente per la convergenza.

In termini concreti, nello spazio $L^2([-\pi, \pi])$ la questione equivale a chiedersi se esiste f tale che

$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t)-\left(\tfrac{1}{2}a_0+\sum_1^N a_n\cos nt+\sum_1^N b_n\sin nt\right)\right|^2 dt=0$, che, come visto in precedenza, è proprio il risultato fondamentale che si vuole ottenere.

Uno spazio in cui tutte le successioni di Cauchy convergono ad un elemento dello spazio stesso di dice *completo* ; uno spazio dotato di prodotto scalare e completo si dice *spazio di Hilbert*.

La questione non viene qui ulteriormente approfondita. Basti dire che $L^2([-\pi,\pi])$ è effettivamente di Hilbert, è generato dalla base ortonormale $\{1/\sqrt{2\pi},(1/\sqrt{\pi})\cos nt,(1/\sqrt{\pi})\sin nt\}$, e non è certo esaurito dalle combinazioni lineari finite degli elementi di base (ad esempio, come si è già visto, la funzione x ha infiniti coefficienti non nulli). Quindi, se $f\in L^2([-\pi,\pi])$, posto, come sopra, $a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt dt$, $b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt dt$, le serie $\sum|a_n|^2,\sum|b_n|^2$ convergono, e effettivamente $\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t)-\left(\tfrac{1}{2}a_0+\sum_1^N a_n\cos nt+\sum_1^N b_n\sin nt\right)\right|^2 dt=0$.

Le combinazioni lineari finite degli elementi della base non costituiscono evidentemente l'intero spazio, ma sono un *insieme denso*, ossia ogni elemento dello spazio è approssimabile con accuratezza arbitraria da combinazioni lineari finite di elementi della base.

NOTA – Se si considera un sottoinsieme di $\{e^{(n)}\}$ (ad esempio si prendono solo gli indici n pari, o, nel caso di $L^2([-\pi,\pi])$, solo $\{(1/\sqrt{\pi})\cos nt\}$), si ha ancora un sistema ortonormale, che però non è una base, ossia non genera l'intero spazio. In tal caso, dato un vettore v , il vettore $\sum v_{k_n}e^{(k_n)}$ con $v_{k_n}=\left(v,e^{(k_n)}\right)$ è quello che approssima meglio v nello spazio generato da $\{e^{(k_n)}\}$. Lo si verifica immediatamente minimizzando $\left\|v-\sum c_n e^{(k_n)}\right\|^2=\|v\|^2-2\sum c_n\left(v,e^{(k_n)}\right)+\sum c_n^2$ rispetto ai c_n .

Si osservi che in questo caso, se si amplia il sottospazio aggiungendo nuovi elementi della base a $\{e^{(k_n)}\}$, per ottenere la migliore approssimazione non occorre ricalcolare i coefficienti degli $e^{(k_n)}$, che restano invariati, e basta calcolare i coefficienti degli elementi di base aggiunti. Questo risultato è dovuto all'ortogonalità della base $\{e^{(n)}\}$.

ESEMPIO Per la funzione $f(t)=\begin{cases}0 & -\pi\le t<0\\ 1 & 0\le t\le\pi\end{cases}$, applicando le formule per il calcolo dei coefficienti si ottiene

$$a_0=\tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}dt=1$$

$$a_n=\tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nt dt=0$$

$$b_n=\tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nt dt=\left\langle\begin{matrix}0 & n & \text{pari}\\ 2/(\pi n) & n & \text{dispari}\end{matrix}\right.$$

e quindi la serie di Fourier è $\dfrac{1}{2}+\sum_0^{\infty}\dfrac{2}{\pi(2n+1)}\sin(2n+1)t$.

Si noti che il termine costante ½ è la media di f su $[-\pi,\pi]$; la funzione $f-\frac{1}{2}$ è dispari

($f(-t) = -f(t)$) e di conseguenza ha uno sviluppo di soli seni.

Si consideri ora la funzione $g(t) = \frac{\pi}{2}\left(f(t) - \frac{1}{2} \right) = \sum_{0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}$.

Le somme parziali della serie, $g^{(N)}(t) = \sum_{0}^{N} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}$ possono essere calcolate esplicitamente. Infatti $\frac{dg^{(N)}}{dt} = \sum_{0}^{N} \cos(2n+1)t = \frac{1}{2}\sum_{0}^{N}\left(e^{i(2n+1)t} + e^{-i(2n+1)t}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sin(2N+2)t}{\sin t}$ (le sequenze di esponenziali sono geometriche, ed è quindi nota la formula per il calcolo della somma).

Quindi, tenendo conto che $g^{(N)}(0) = 0$, si ha $g^{(N)}(t) = \frac{1}{2}\int_{0}^{t} \frac{\sin(2N+2)\tau}{\sin\tau} d\tau$.

Valgono i seguenti risultati:

- $\lim_{t\to 0} \frac{dg^{(N)}}{dt} = N+1$, e $\frac{dg^{(N)}}{dt}$, prolungata per continuità in 0, ha massimo assoluto in 0.
- $g^{(N)}(t)$ ha oscillazioni che diminuiscono di ampiezza da $t = 0$ a $t = \pi/2$; il massimo assoluto è nel punto $t = \pi/(2N+2)$.
- Per valutare questo massimo, si osservi che $g^{(N)}\left(\frac{\pi}{2N+2}\right) > \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/(2N-2)} \frac{\sin(2N+2)\tau}{\tau} d\tau = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{4} + \delta$, con $\delta > 0$ indipendente da n (quest'ultima uguaglianza può essere verificata osservando che il grafico di $\frac{\sin u}{u}$ sta sempre sopra il segmento che congiunge i punti $(0,1)$ e $(\pi,0)$).

Di conseguenza, la funzione $f^{(N)}(t) = \frac{2}{\pi} g^{(N)}(t) + \frac{1}{2}$, che converge a $f(t)$ in media quadratica, assume un valore più grande di $1 + \frac{2}{\pi}\delta$ in un punto che si avvicina sempre di più a t=0 al crescere di N . In altre parole, le oscillazioni di $f^{(N)}(t)$ intorno al valore limite $f(t) \equiv 1$ in $[0,\pi]$ mantengono un'ampiezza non tendente a 0 in prossimità di $t = 0$, che è un punto di discontinuità per $f(t)$ (*fenomeno di Gibbs*).

Regolarità e rapidità di convergenza

Dato che seni e coseni sono funzioni limitate e continue su tutto **R ,** se i coefficienti di una serie di Fourier tendono a 0 almeno come $n^{-\alpha}, \alpha > 1$, la serie converge totalmente, e quindi uniformemente. Di conseguenza, la sua somma è una funzione continua su tutto **R** . Inoltre essa è ovviamente periodica di periodo 2π ; di conseguenza la sua restrizione all'intervallo $[-\pi,\pi]$ verifica la condizione $f(-\pi) = f(\pi)$.

Se poi i coefficienti tendono a 0 almeno come $n^{-\alpha}, \alpha > 2$ anche la serie ottenuta derivando termine a termine converge uniformemente; quindi la somma è derivabile con continuità.

Esiste quindi un legame fra la rapidità di convergenza dei coefficienti e la regolarità della funzione somma della serie. I risultati visti sopra mostrano che una certa rapidità di convergenza è condizione sufficiente per una certa regolarità. La discussione che segue mostra che si possono anche stabilire condizioni necessarie di regolarità.

Per iniziare, si osservi che, se è possibile applicare la regola di integrazione per parti (il che avviene certamente, ad esempio, se $f(t)$ è derivabile con derivata in $L^2([-\pi,\pi])$ e continua eccetto che in un numero finito di punti, dove la derivata presenta una discontinuità a salto – ossia i limiti destro e sinistro esistono e sono diversi – e $f(-\pi) = f(\pi)$) si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt = \tfrac{1}{n} f(t)\sin nt \,|_{-\pi}^{\pi} - \tfrac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin ntdt = -\tfrac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin ntdt$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt = -\tfrac{1}{n} f(t)\cos nt \,|_{-\pi}^{\pi} + \tfrac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos ntdt = \tfrac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos ntdt$$

da cui si ricava che, se i coefficienti di Fourier di $f'(t)$ sono infinitesimi di ordine $n^{-\alpha}$, quelli di $f(t)$ sono infinitesimi di ordine $n^{-(\alpha+1)}$.

Si può poi verificare direttamente che una funzione costante a tratti ha coefficienti di ordine n^{-1}; inoltre si verifica facilmente che, se una funzione presenta un numero finito di discontinuità a salto, e ad essa si può applicare la regola di integrazione per parti in tutti gli intervalli limitati dai punti di discontinuità, i suoi coefficienti sono almeno di ordine n^{-1}.

Tutte queste considerazioni si applicano a funzioni definite su tutto $\mathbf{R}$ e periodiche di periodo 2π ; quindi, se $f(-\pi) \neq f(\pi)$, questo dà luogo a discontinuità e si riflette sulla rapidità di convergenza dei coefficienti.

Si osservi che non tutte le funzioni di $L^2([-\pi,\pi])$ hanno coefficienti di ordine almeno n^{-1} : infatti, ad esempio, dato che la serie $\sum n^{-4/3}$ converge, la serie di Fourier $\sum n^{-2/3}\cos nt$ deve convergere in $L^2([-\pi,\pi])$ a causa della completezza di questo spazio.

Serie di Fourier in forma complessa

Anziché usare seni e coseni, si può utilizzare l'espressione

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_k e^{ikt} \quad \text{con} \quad f_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt .$$

In questo modo però si passa nel campo complesso, e vanno ridefinite le proprietà degli spazi di Hilbert. In particolare, per funzioni a quadrato integrabile a valori complessi il prodotto scalare si definisce come $(f,g) = \int f(t)\overline{g(t)}dt$; quindi $(f,g) = \overline{(g,f)}$. Per le funzioni di base e^{ikt} vale l'ortogonalità: $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-imt}dt = 2\pi\delta_{km}$.

Se $f(t)$ è reale, allora $f_{-k} = \overline{f_k}$. Dalle ben note relazioni fra esponenziali complessi e funzioni trigonometriche è facile trasformare le serie di Fourier da forma complessa a forma trigonometrica e viceversa.

NOTA Le relazioni fra regolarità delle funzioni e andamento dei coefficienti valgono ovviamente anche se si adotta la base complessa.

Si richiamano i seguenti risultati:

- Le funzioni di $L^2([-\pi,\pi])$ per cui esiste la derivata prima, anch'essa in $L^2([-\pi,\pi])$, sono quelle tali che $\sum n^2 |f_n|^2$ converge;

- Più in generale, le funzioni di $L^2([-\pi,\pi])$ per cui esiste la derivata *k*-esima, anch'essa in $L^2([-\pi,\pi])$, sono quelle tali che $\sum n^{2k}|f_k|^2$ converge.

Gli spazi $W^s([-\pi,\pi]) = \{f \in L^2([-\pi,\pi]) \mid \sum n^{2s}|f_n|^2 < \infty\}$, con s reale, fanno parte della famiglia degli *spazi di Sobolev*. E' evidente per quanto visto sopra che $f \in W^s \Leftrightarrow f^{(s)} \in L^2$ ($f^{(s)}$ è la derivata di ordine s).

Si deve rilevare che, per le funzioni di $L^2([-\pi,\pi])$, che sono in generale irregolari, la derivata va definita in un senso generalizzato, che naturalmente per le funzioni regolari si riconduce al concetto ben noto.
Una possibile definizione è: si dice che g è la *derivata in senso debole* di f se, per ogni funzione φ continua con derivata continua, $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = 0$, si ha $\int_{-\pi}^{\pi} f\varphi' = -\int_{-\pi}^{\pi} g\varphi$.

Serie di Fourier in intervalli arbitrari

Sia $f(t) \in L^2([-\pi,\pi])$ e sia $\sum f_k e^{ikt}$ la sua serie di Fourier. Come si è visto la serie è definita su tutto $\mathbf{R}$ e periodica di periodo 2π; la sua somma estende $f(t)$ a una funzione periodica di periodo 2π definita su tutto $\mathbf{R}$. Sia ora $g(u) = f\left(\frac{\pi u}{T}\right)$; $g(u)$ è periodica di periodo $2T$, e ovviamente la serie $\sum f_k e^{ik\pi u/T}$ converge in media quadratica a $g(u)$.
Inoltre $f_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(Tt/\pi)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g(u)e^{-ik\pi u/T}du$.
Si è così ottenuta la regola per il calcolo dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier per una qualsiasi funzione a quadrato integrabile nell' intervallo $[-T,T]$ o un qualsiasi altro intervallo di ampiezza $2T$, dove T è un numero positivo arbitrario.

NOTE 1. Si consideri una funzione $f \in L^2([-\pi,\pi])$, nulla in un intervallo chiuso $I \subset [-\pi,\pi]$ ma non identicamente nulla su tutto $[-\pi,\pi]$. Allora i suoi coefficienti di Fourier non sono tutti nulli, ma $\sum_{-\infty}^{\infty} f_k e^{ikt} = 0$ in I. Si può quindi dire che le funzioni e^{ikt} non sono linearmente indipendenti in I. Si può però provare che, se si prende soltanto un numero finito di funzioni e^{ikt}, queste sono sempre linearmente indipendenti in ogni intervallo limitato.

2. Nell'intervallo $[0,\pi]$ la base è costituita da $\{e^{i2kt}\}$, ovvero da $\{\cos 2kt, \sin 2kt\}$. Si può però vedere che si può scegliere come base anche $\{\cos kt\}$, oppure $\{\sin kt\}$. Basta pensare che una funzione f definita in $[0,\pi]$ può essere prolungata a $[-\pi,\pi]$ sia come funzione pari, $f(-t) = f(t)$, il cui sviluppo è costituito da soli coseni, sia come funzione dispari, $f(-t) = -f(t)$, sviluppabile in soli seni.

Aliasing

Sia f una funzione continua in $\left[-\pi,\pi\right]$, $f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}F_k e^{ikt}$, e si supponga di conoscerne i valori nei punti $t_j=\frac{\pi}{2N}+j\frac{\pi}{N}$, $j=0,\cdots,2N-1$. Che cosa se ne può dedurre dei coefficienti F_k ?

PREMESSA
$$\sum_{j=0}^{2N-1}e^{imt_j}=e^{im\frac{\pi}{2N}}\sum_{j=0}^{2N-1}e^{imj\frac{\pi}{N}}=\begin{cases} e^{im\frac{\pi}{2N}}\dfrac{1-e^{i2N\frac{\pi}{N}m}}{1-e^{im\frac{\pi}{N}}}=0 & m=1,\cdots,2N-1 \\ 2N & m=0 \end{cases}.$$

Allora
$$\sum_{j=0}^{2N-1}f(t_j)e^{-i\ell t_j}=\sum_{j=0}^{2N-1}\sum_{-\infty}^{\infty}f_k e^{i(k-\ell)t_j}=\sum_{h=-\infty}^{\infty}\sum_{p=0}^{2N-1}f_{\ell+2hN+p}\sum_{j=0}^{2N-1}e^{i2hNt_j}e^{ipt_j}=2N\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h f_{\ell+2hN}$$
(si è posto $k=\ell+2hN+p$, $\ell=0,\cdots,2N-1$, $-\infty<h<\infty$, $p=0,\cdots,2N-1$).

Quindi, se gli unici coefficienti non nulli della serie di Fourier sono quelli con indice $k=0,\cdots,2N-1$ (ossia se nella sommatoria della formula precedente l'unico indice h che contribuisce è h=0), allora F_k è univocamente determinato: $F_k=\frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1}f(t_j)e^{-ikt_j}$.

Se invece questa condizione non si verifica, il calcolo visto sopra fornisce una combinazione lineare infinita di una sequenza di coefficienti, che non possono essere determinati individualmente (*aliasing*).

NOTA Supponiamo $f(t)=\sum_{0}^{2N-1}F_k e^{ikt}$, con valori $f(t_j)$ reali. Allora gli F_k calcolati sono complessi, e così pure la funzione $f(t)$. D'altra parte anche $\overline{f(t)}=\sum_{0}^{2N-1}\overline{F_k}e^{-ikt}$ assume gli stessi valori $f(t_j)$ reali, e così pure $f_+(t)=\frac{1}{2}\left(f(t)+\overline{f(t)}\right)$, che è reale.
Questa situazione può apparire paradossale: partendo da $2N$ dati, si ricavano $4N$-1 coefficienti.
In realtà, il sistema di equazioni è a coefficienti complessi, e si risolve in campo complesso, ottenendo i $2N$ numeri complessi F_k a partire dai $2N$ numeri complessi $f(t_j)$, che nel caso presente hanno parte immaginaria nulla. Quindi f, e così pure $\bar{f}$, hanno $2N$ coefficienti complessi in generale non nulli, mentre f_+ ne ha $4N$-1 ($k=-(2N-1),\cdots,0,\cdots,2N-1$), di cui uno, $(F_+)_0$, sicuramente reale, mentre i coefficienti con k negativo sono complessi coniugati di quelli con il corrispondente k positivo. Da questa espressione di f_+ si ottiene poi quella in seni e coseni, i cui coefficienti, che sono ancora $4N$-1, sono tutti reali.
Si noti però che la soluzione così ottenuta non è univoca. Infatti $\cos(2N-k)t_j=-\cos kt_j$, $\sin(2N-k)t_j=\sin kt_j$; di conseguenza i coefficienti di $\cos(2N-k)t$ e di $\cos kt$, come pure quelli di $\sin(2N-k)t$ e di $\sin kt$, non sono determinabili separatamente in modo univoco. Per avere soluzione univoca con i $2N$ dati a disposizione, bisogna fermarsi a frequenza N (*frequenza di Nyquist*).
Inoltre il coefficiente di $\cos Nt$ non è univocamente determinabile, dato che $\cos Nt_j\equiv 0$.