Armoniche sferiche

Equazione di Laplace nel cerchio unitario

In teoria del potenziale le armoniche sferiche vengono introdotte come tracce sulla sfera unitaria S_1 delle funzioni armoniche (ossia soluzioni dell'equazione di Laplace $\nabla^2 u \equiv (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)u = 0$) definite all'interno oppure all'esterno della sfera. Esse sono una base dello spazio $L^2(S_1)$, e la loro trattazione presenta forti analogie con quella delle serie di Fourier definite nell'intervallo $[-\pi,\pi]$, e quindi sulla circonferenza unitaria in $\mathbf{R}^2$.

Per capire il legame fra armoniche sferiche e funzioni armoniche all'interno della sfera unitaria in $\mathbf{R}^3$, mettendo l'accento sulla struttura di spazio di Hilbert di $L^2(S_1)$, è bene partire dall'analogia con $\mathbf{R}^2$. Punto di partenza è l'esame dello spazio dei polinomi omogenei di grado N:

$$P_N(x,y) = \sum_{k=0}^{N} c_k x^k y^{N-k} \quad ,$$

che è generato dagli $N+1$ monomi $x^k y^{N-k}$, $k = 0,\cdots,N$, ed è quindi $(N+1)$-dim.
Lo spazio dei polinomi omogenei di grado N armonici è evidentemente un sottospazio del precedente. Per determinarne la dimensione, si consideri che

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)P_N(x,y) = \sum_{k=2}^{N} c_k k(k-1)x^{k-2}y^{N-k} + \sum_{k=0}^{N-2} c_k (N-k)(N-k-1)x^k y^{N-k-2} =$$
$$\sum_{k=0}^{N-2}\left[c_{k+2}(k+2)(k+1) + c_k(N-k)(N-k-1)\right]x^k y^{N-k-2}$$

Di conseguenza, affinché P_N sia armonico, devono essere verificate le $N-1$ condizioni lineari $c_{k+2}(k+2)(k+1) + c_k(N-k)(N-k-1) = 0$, ed esistono quindi 2 polinomi omogenei di grado N armonici linearmente indipendenti.

Si verifica poi che, se si considerano in coordinate polari le funzioni $r^N \cos N\theta, r^N \sin N\theta$, in coordinate cartesiane esse danno luogo a polinomi omogenei di grado N armonici.
Che siano polinomi omogenei lo si verifica facilmente per induzione; inoltre esse sono armoniche, dato che sono parte reale e immaginaria della funzione olomorfa $z^N = r^N e^{iN\theta}$.

NOTA: Lo spazio dei polinomi omogenei di grado N armonici è invariante per rotazioni. Infatti una rotazione di un angolo α è espressa sostituendo la variabile θ con $\theta+\alpha$, e

$$\cos N(\theta+\alpha) = \cos N\alpha \cos N\theta - \sin N\alpha \sin N\theta$$
$$\sin N(\theta+\alpha) = \cos N\alpha \sin N\theta + \sin N\alpha \cos N\theta$$

Di conseguenza, un polinomio omogeneo di grado N armonico nella variabile $\theta+\alpha$ è esprimibile come combinazione lineare di polinomi omogenei di grado N armonici nella variabile θ, con coefficienti dipendenti da α.

In conseguenza di quanto visto sopra, una funzione della forma $\sum^{N}(a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta)$, trasformata in coordinate cartesiane, è un polinomio armonico in un qualsiasi cerchio con centro nell'origine. Il suo valore al contorno sulla circonferenza unitaria $(r=1)$ è

$\sum^{N}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$.

Se ora si vuole trovare la funzione armonica nel cerchio unitario il cui valore sulla frontiera è una funzione $f(\theta)$ appartenente a $L^2([-\pi,\pi])$ (*problema di Dirichlet*) , la si sviluppa in serie di Fourier: $f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$. La serie $\frac{1}{2}a_0 + \sum^{\infty}(a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta)$ è certamente convergente all'interno del cerchio unitario (essendo $r<1$, la convergenza è rapida, e la somma $F(r,\theta)$ è infinitamente derivabile; inoltre si può provare che F è armonica nel cerchio unitario, e il suo valore sulla frontiera è proprio $f(\theta)$ (che, essendo una funzione arbitraria di $L^2([-\pi,\pi])$, non è necessariamente regolare.

Equazione di Laplace nella sfera unitaria

Una procedura analoga può essere adottata in $\mathbf{R}^3$, partendo dai polinomi omogenei e studiando le condizioni verificate dai polinomi omogenei armonici, per passare poi alle tracce sulla superficie sferica di raggio 1 con centro nell'origine.

I polinomi omogenei di grado N in $\mathbf{R}^3$ hanno la forma

$$P_N(x,y,z) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{h=0}^{N-k} c_{hk} x^k y^h z^{N-k-h} .$$

Il numero totale delle possibili coppie h,k , e quindi la dimensione dello spazio dei polinomi omogenei di grado N è $1+2+\cdots+(N+1) = \dfrac{(N+1)(N+2)}{2}$.

Applicando l'operatore di Laplace $\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ a P_N si ottiene un polinomio omogeneo di grado $N-2$; inoltre, si può verificare che qualsiasi P_{N-2} può essere ottenuto applicando l'operatore di Laplace ad un qualche P_N. Quindi, imporre l'annullamento di tutti i coefficienti di $(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)P_N$ significa imporre $N(N-1)/2$ condizioni lineari indipendenti sui coefficienti che devono essere soddisfatte da un P_N armonico. Di conseguenza, la dimensione dello spazio dei polinomi omogenei armonici di grado N è $\dfrac{(N+1)(N+2)}{2} - \dfrac{N(N-1)}{2} = 2N+1$.

Come esempio si possono esaminare i polinomi omogenei armonici di grado $N = 0,1,2$.
Per $N=0$ la dimensione è 1; si ha la costante $P_0 = 1$, che è evidentemente una funzione armonica.
Per $N=1$ la dimensione è 3; le funzioni di base sono x , y , z , che sono armoniche.
Per $N=2$ la dimensione è 6, e si può scegliere come funzioni di base i monomi x^2 , y^2 , x^2 , xy , yz , xz . Lo spazio dei polinomi armonici ha invece dimensione 5; si può scegliere come funzioni di base ad esempio xy , yz , xz , $x^2 - y^2$, $z^2 - x^2$.

Passando in coordinate polari, si ha, per $N=1$

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\lambda \\
y &= r\sin\theta\sin\lambda \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned}
\quad .
$$

Per $N = 2$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
xy &= r^2\sin^2\theta\cos\lambda\sin\lambda = r^2\left(\tfrac{1}{2}\sin^2\theta\sin 2\lambda\right) \\
yz &= r^2\sin\theta\cos\theta\sin\lambda \\
xz &= r^2\sin\theta\cos\theta\cos\lambda \qquad . \\
x^2 - y^2 &= r^2\sin^2\theta(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda) = r^2\sin^2\theta\cos 2\lambda \\
z^2 - x^2 &= r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\lambda)
\end{aligned}
$$

I primi 4 termini presentano una struttura simmetrica, nel senso che una coppia è costituita da una stessa funzione $r^2 f_1(\theta)$ moltiplicata una volta per $\sin\lambda$, una volta per $\cos\lambda$, l'altra coppia è costituita da una stessa funzione $r^2 f_2(\theta)$ moltiplicata una volta per $\sin 2\lambda$, una volta per $\cos 2\lambda$ (a meno di un fattore ½). L'ultimo termine si sottrae a questa regolarità, ma si può introdurre al suo posto la combinazione lineare

$$(x^2 - y^2) + 2(z^2 - x^2) = r^2(2\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r^2(3\cos^2\theta - 1)$$

che è un polinomio in $\cos\theta$ indipendente da λ.

Si può provare che, per un grado N qualsiasi, è possibile trovare una base dello spazio dei polinomi omogenei armonici con caratteristiche analoghe a quelle viste per $N = 1,2$, ossia, in coordinate polari:

- tutti gli elementi della base (questo è ovvio) si possono esprimere come funzioni di θ e λ moltiplicate per r^N;
- esiste un (unico) elemento che non dipende da λ; la sua dipendenza da θ è espressa da un polinomio in $t = \cos\theta$;
- gli altri $2N$ elementi sono organizzati in N coppie nelle quali la dipendenza da θ è espressa da una stessa funzione, che viene moltiplicata una volta per $\cos k\lambda$, una volta per $\sin k\lambda$ ($k = 1,\cdots,N$).

Quindi un polinomio armonico di grado N in coordinate polari ha la forma

$$P(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} r^n f^{(n,k)}(\theta)(a_{nk}\cos k\lambda + b_{nk}\sin k\lambda)\,,$$

e il suo valore al contorno sulla sfera unitaria S_1 ($r = 1$) è ovviamente

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} f^{(n,k)}(\theta)(a_{nk}\cos k\lambda + b_{nk}\sin k\lambda)\,.$$

Si può inoltre provare che la famiglia di funzioni

$$\left\{f^{(n,k)}(\theta)\cos k\lambda,\ f^{(n,k)}(\theta)\sin k\lambda \mid n = 0,1,\cdots;\ k = 0,\cdots,n\right\}$$

è una base di $L^2(S_1)$. Presa una qualsiasi funzione $f(\theta,\lambda)\in L^2(S_1)$, per trovare la (unica) funzione armonica all'interno di S_1 che assume valore $f(\theta,\lambda)$ in S_1, si sviluppa $f(\theta,\lambda)$:

$$f(\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} f^{(n,k)}(\theta)(a_{nk}\cos k\lambda+b_{nk}\sin k\lambda)\qquad \left(\sum_{n,k}(a_{nk}^2+b_{nk}^2)<+\infty\right),$$

e si verifica immediatamente che la funzione

$$F(r,\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} r^n f^{(n,k)}(\theta)(a_{nk}\cos k\lambda+b_{nk}\sin k\lambda)$$

è la funzione cercata. Il procedimento è del tutto analogo a quello visto in $\mathbf{R}^2$, e anche in questo caso la regolarità di $F(r,\theta,\lambda)$ è garantita dalla rapida decrescenza del fattore r^n.

NOTA: se il fattore r^n è sostituito da $(r/R)^n$ si ha convergenza all'interno di S_R $(r<R)$, e valore al contorno $f(\theta,\lambda)$ su S_R $(r=R)$;
se r^n è sostituito da $r^{-(n+1)}$ (*trasformazione di Kelvin*), si può provare che si ottiene una serie convergente all'esterno di S_1 ad una funzione armonica con valore al contorno $f(\theta,\lambda)$ su S_1;
più in generale, se r^n è sostituito da $(R/r)^{n+1}$, si ottiene una funzione armonica all'esterno di S_R, con valore al contorno $f(\theta,\lambda)$ su S_R.

NOTA: le trasformazioni descritte nella nota precedente, che consentono di costruire funzioni armoniche all'esterno di una sfera, si applicano allo studio del potenziale della gravità generato da una massa sferica. Poiché la terra non è esattamente sferica, questo approccio può apparire riduttivo. Tuttavia, è possibile ottenere per questa via approssimazioni del potenziale della gravità terrestre tenendo conto di un risultato, noto nell'ambito della geodesia come *teorema di Runge-Krarup*, che afferma che, dato un dominio *stellato* Σ (ossia tale che l'origine è al suo interno, e, se contiene un punto, contiene anche tutto il segmento che congiunge quel punto con l'origine), e data una funzione armonica nel dominio Ω esterno a Σ, questa è approssimabile uniformemente in Ω con funzioni armoniche all'esterno di sfere *S* contenute in Σ, e quindi esprimibili come serie della forma descritta in precedenza.

Introduzione delle armoniche sferiche

Le funzioni $f^{(n,0)}(\theta)$, che, come si è già detto, sono polinomi in $t=\cos\theta$, coincidono, a meno di una costante di proporzionalità, con i *polinomi di Legendre*, usualmente espressi dalla *formula di Rodrigues*:

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left((t^2-1)^n\right)\quad ;$$

le funzioni $f^{(n,k)}(\theta)$ coincidono, sempre a meno di una costante di proporzionalità, con le *funzioni associate di Legendre*:

$$P_{nk}(t)=(1-t^2)^{k/2}\frac{d^k}{dt^k}P_n(t)\qquad (t=\cos\theta).$$

Le principali proprietà di $P_n(t)$ sono:

- $P_n(-t)=(-1)^n P_n(t)$

- $P_n(1) = 1$
- $|P_n(t)| \le 1$ per $|t| \le 1$
- $P_n(t)$ ha n zeri distinti, tutti contenuti in $]-1,1[$.

$P_{nk}(t)$ ha le seguenti proprietà:

- $P_{nk}(-t) = (-1)^{n+k} P_{nk}(t)$
- $P_{nk}(\pm 1) = 0$
- $P_{nk}(t)$ ha $n-k$ zeri in $]-1,1[$.

Inoltre sono verificate le uguaglianze

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(t)dt \equiv \int_0^{\pi} P_n^2(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \quad ; \quad \int_{-1}^{1} P_{nk}^2(t)dt = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+k)!}{(n-k)!} \quad \text{, e inoltre}$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)dt = 0 \quad ; \quad \int_{-1}^{1} P_{nk}(t)P_{mk}(t)dt = 0 \quad \text{per } n \ne m .$$

Infine, utilizzando i polinomi e le funzioni associate di Legendre, vengono definite le *armoniche sferiche*, che costituiscono una base ortogonale di norma costante in $L^2(S_1)$:

$$Y_{n0}(\theta,\lambda) = \sqrt{2n+1}\, P_n(\cos\theta) \quad \text{(indipendente da } \lambda\text{)}$$

$$Y_{nk}(\theta,\lambda) = \left(2(2n+1)\frac{(n-k)!}{(n+k)!} \right)^{1/2} P_{n|k|}(\cos\theta)\cdot \begin{cases} \cos k\lambda & k = 1,\cdots,n \\ \sin k\lambda & k = -n,\cdots -1 \end{cases} .$$

Queste funzioni, per ogni n fissato, sono esattamente $2n+1$, e sono normalizzate in modo tale che

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S_1} Y_{nk}^2(\sigma)d\sigma \equiv \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, Y_{nk}^2(\theta,\lambda) = 1 .$$

Una maniera diversa di ottenere i polinomi di Legendre, di particolare interesse in relazione alla teoria del potenziale, si ricava dallo sviluppo della funzione $1/r_{PQ}$, dove r_{PQ} è la distanza fra i punti P e Q. Partendo dalla formula

$$r_{PQ}^2 = r_P^2 + r_Q^2 - 2r_P r_Q \cos\psi = r_P^2 \left(1 + \left(\frac{r_Q}{r_P}\right)^2 - 2\frac{r_Q}{r_P}\cos\psi \right) \equiv r_P^2\left(1 + x^2 - 2xt\right),$$

dove r_P e r_Q sono le distanze di P e Q dall'origine O, e ψ è l'angolo fra $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$, tenendo presente lo sviluppo di Taylor di $(1+\alpha)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \alpha^k = 1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2 - \frac{5}{16}\alpha^3 + \cdots$, posto $\alpha = x^2 - 2xt$, si ottiene

$$\begin{aligned}(1 + x^2 - 2xt)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}(x^2 - 2xt) + \frac{3}{8}(x^2 - 2xt)^2 - \frac{5}{16}(x^2 - 2xt)^3 + \cdots = \\ &= 1 + tx + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t^2 \right)x^2 + \left(-\frac{3}{2}t + \frac{5}{2}t^3 \right)x^3 + \cdots + P_k(t)x^k + \cdots\end{aligned} ,$$

ossia i coefficienti delle diverse potenze di x sono proprio i polinomi di Legendre in t.

Di conseguenza, si può scrivere

$$\frac{1}{r_{PQ}} = \frac{1}{r_P}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r_Q}{r_P}\right)^k P_k(\cos\psi) = \frac{1}{r_Q}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r_Q}{r_P}\right)^{k+1} P_k(\cos\psi) \ ;$$

la serie converge per $r_Q < r_P$.

I 2 sviluppi possono essere interpretati in questa maniera:

- fissato P, la prima serie può essere vista come sviluppo della funzione rispetto alla variabile Q, all'interno della sfera di raggio r_P ; ψ è l'angolo della direzione $\overline{OQ}$ (variabile) con la direzione $\overline{OP}$ (fissa);
- fissato Q, la seconda serie può essere vista come sviluppo della funzione rispetto alla variabile P, all'esterno della sfera di raggio r_Q ; ψ è l'angolo della direzione $\overline{OP}$ (variabile) con la direzione $\overline{OQ}$ (fissa).

Si osservi, considerando ad esempio il primo sviluppo, che, a parità di r_Q, la funzione dipende solo da ψ e non dalla particolare posizione di Q intorno alla direzione $\overline{OP}$; per questa ragione lo sviluppo contiene solo i polinomi e non le funzioni associate di Legendre.

Rotazioni sulla sfera unitaria

L'operatore di Laplace $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ è *invariante per rotazioni*, nel senso che, se $\nabla^2 f(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r})$ $\left(\mathbf{r} = (x\ y\ z)^T\right)$, allora, posto $\bar{f}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{Ur})$ ($\mathbf{U}$ matrice di rotazione), si ha $\nabla^2 \bar{f}(\mathbf{r}) = g(\mathbf{Ur})$. Di conseguenza, se f è armonica, lo è anche $\bar{f}$.
Inoltre, se $P(\mathbf{r})$ è un polinomio omogeneo di grado *n*, lo è anche $P(\mathbf{Ur})$. Di conseguenza, lo spazio dei polinomi omogenei armonici di grado *n*, e anche, considerando le tracce sulla sfera unitaria, lo spazio V_n generato dalle armoniche sferiche Y_{nm}, $m = -n, \cdots, n$, sono invarianti per rotazioni, ossia $Y_{nk}(\mathbf{U}\sigma) = \sum_{m=-n}^{n} a_m Y_{nm}(\sigma)$ (σ vettore di lunghezza 1; σ è individuato da un particolare valore dei parametri θ, λ).
Inoltre l'elemento Y_{n0}, che è, a meno di costanti moltiplicative, l'unico in V_n indipendente da λ, è esso stesso invariante per rotazioni attorno all'asse *z*.

Si consideri ora la funzione $P_n^{(\sigma)}(\sigma') = \sum_{k=-n}^{n} Y_{nk}(\sigma) Y_{nk}(\sigma')$ $(\sigma, \sigma' \in S_1)$, che, per ogni valore fissato di σ, appartiene a V_n. Si ha

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S_1} P_n^{(\sigma)}(\sigma') Y_{jm}(\sigma') d\sigma' = \sum_{k=-n}^{n} Y_{nk}(\sigma) \frac{1}{4\pi}\int_{S_1} Y_{nk}(\sigma') Y_{jm}(\sigma') d\sigma' = \delta_{jn} Y_{nm}(\sigma) .$$

Quindi $\frac{1}{4\pi}\int_{S_1} P_n^{(\sigma)}(\sigma')Y_{nm}(\mathbf{U}\sigma')d\sigma' = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=-n}^{n} a_k \int_{S_1} P_n^{(\sigma)}(\sigma')Y_{nk}(\sigma')d\sigma' = \sum_{k=-n}^{n} a_k Y_{nk}(\sigma) = Y_{nm}(\mathbf{U}\sigma)$.

D'altra parte $\frac{1}{4\pi}\int_{S_1} P_n^{(\mathbf{U}\sigma)}(\mathbf{U}\sigma')Y_{nm}(\mathbf{U}\sigma')d\sigma' = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1} P_n^{(\mathbf{U}\sigma)}(\sigma')Y_{nm}(\sigma')d\sigma' = Y_{nm}(\mathbf{U}\sigma)$,
e di conseguenza $P_n^{(\sigma)}(\sigma') = P_n^{(\mathbf{U}\sigma)}(\mathbf{U}\sigma')$, dato che le due funzioni hanno gli stessi coefficienti rispetto alla base $\{Y_{nm}, m = -n, \cdots, n\}$. Questo significa che in realtà $P_n^{(\sigma)}(\sigma')$ dipende soltanto dalla distanza angolare $\psi_{\sigma\sigma'}$ fra σ e σ'.

Sia ora $\sigma_0 \equiv (0\,0\,1)^T$. σ_0 è invariante per rotazioni intorno all'asse *z*: $\mathbf{U}_z\sigma_0 = \sigma_0$. Allora $P_n^{(\sigma_0)}(\mathbf{U}_z\sigma') = P_n^{(\sigma_0)}(\sigma')$, ossia $P_n^{(\sigma_0)}$ dipende solo da θ e non da λ, e quindi è proporzionale al polinomio di Legendre P_n. Per calcolare il coefficiente di proporzionalità α, si tenga presente che $P_n^{(\sigma)}(\sigma) \equiv \sum_{k=-n}^{n} Y_{nk}(\sigma)^2$ è una costante indipendente da σ. Di conseguenza si può scrivere
$\sum_{k=-n}^{n} Y_{nk}(\sigma)^2 = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\sum_{k=-n}^{n} Y_{nk}(\sigma)^2 d\sigma = \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{4\pi}\int_{S_1} Y_{nk}(\sigma)^2 d\sigma = 2n+1$.
Poiché per $\psi = 0$ $P_n(\cos\psi) = P_n(1) = 1$, si può scrivere $P_n^{(\sigma)}(\sigma) = (2n+1)P_n(1)$, e quindi $P_n^{(\sigma)}(\sigma') = (2n+1)P_n(\cos\psi_{\sigma\sigma'})$. Infine si ottiene la formula
$P_n(\cos\psi_{\sigma\sigma'}) = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} Y_{nk}(\sigma)Y_{nk}(\sigma')$ (*formula di decomposizione*).

Operatori di convoluzione

Analogamente a quanto visto in dim.1, si definiscono in $L^2(S_1)$ operatori di convoluzione con nuclei dipendenti solamente dalla distanza angolare fra il punto di calcolo e il punto di integrazione. Sia quindi $K(\psi) = \sum k_n P_n(\cos\psi)$ una funzione tale che $\int_0^\pi |K(\psi)|^2 \sin\psi d\psi < \infty$ e $f \in L^2(S_1)$.
Allora

$$\int_{S_1} K(\psi_{\sigma\sigma'}) f(\sigma')d\sigma' = \int_{S_1}\sum k_n P_n(\cos\psi_{\sigma\sigma'})\sum_{j,k} f_{jk}Y_{jk}(\sigma')d\sigma' =$$
$$= \sum_n k_n \sum_{j,k} f_{jk}\frac{1}{2n+1}\sum_m Y_{nm}(\sigma)\int_{S_1} Y_{nm}(\sigma')Y_{jk}(\sigma')d\sigma' = \sum_{n,m}\frac{4\pi}{2n+1}k_n f_{nm}Y_{nm}(\sigma).$$

In particolare $\int_{S_1} K(\psi_{\sigma\sigma'})Y_{nm}(\sigma')d\sigma' = \frac{4\pi}{2n+1}k_n Y_{nm}(\sigma)$, ossia le armoniche sferiche sono autofunzioni dell'operatore di convoluzione con un autovalore che dipende solo dall'indice *n* e non da *m*.

ESEMPIO 1: Sia $K_r(\psi) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi)$ $(R < r)$. Allora

$u(r,\sigma) \equiv \int_{S_1} K_r(\psi_{\sigma\sigma'}) f(\sigma')d\sigma' = \sum_{n,m} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} f_{nm}Y_{nm}(\sigma)$. Si noti che $u(r,\sigma)$ è la funzione armonica all'esterno della sfera con centro nell'origine e raggio R il cui valore al contorno sulla superficie della sfera è proprio $f(\sigma)$. Quindi l'operatore di convoluzione fornisce la soluzione del problema esterno di Dirichlet con frontiera sferica.

E' possibile scrivere $K_r(\psi)$, detto *nucleo di Poisson*, in forma esplicita. Infatti

$$K_r(\psi) = \frac{1}{4\pi}\left(-2r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right)\sum_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi) = \frac{R}{4\pi}\left(-2r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right)(r^2 + R^2 - 2rR\cos\psi)^{-1/2} =$$
$$= \frac{R}{4\pi}(r^2 - R^2)(r^2 + R^2 - 2rR\cos\psi)^{-3/2}.$$

ESEMPIO 2: Data $u(r,\sigma) \equiv \sum_{n,m} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} f_{nm}Y_{nm}(\sigma)$, si ha $-r\frac{\partial u}{\partial r}(r,\sigma) = \sum_{n,m}(n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} f_{nm}Y_{nm}$,

da cui $g_r(\sigma) \equiv \frac{\partial u}{\partial r}(r,\sigma)\Big|_{r=R} = \sum_{n,m}\left(-\frac{n+1}{R}\right) f_{nm}Y_{nm}$ (si ricordi che, se *u* è il potenziale della gravità, la sua derivata radiale è proprio la componente radiale della gravità).

Allora, posto $K_r(\psi) = -\frac{R}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi)$ $(R < r)$ applicato a $g_r(\sigma)$ consente di ottenere $u(r,\sigma)$, ossia di determinare il potenziale all'esterno della sfera, dati i valori della componente radiale della gravità sul contorno (*problema di Neumann*). Anche in questo caso è possibile scrivere un'espressione esplicita del nucleo, detto *nucleo di Hotine.*

ESEMPIO 3 (media mobile): sia $C_\psi(\sigma)$ una calotta sulla sfera unitaria con centro in σ e ampiezza angolare ψ, la cui area è $\mu\big(C_\psi(\sigma)\big) = 2\pi(1-\cos\psi)$. Allora la media mobile (ossia variabile con σ, fissato ψ) di $f(\sigma)$ su $C_\psi(\sigma)$ è data da $\overline{f_\psi}(\sigma) = \frac{1}{\mu\big(C_\psi(\sigma)\big)}\int_{C_\psi(\sigma)} f(\sigma')d\sigma'$. La si ottiene applicando a f un operatore di convoluzione con nucleo $K(\psi') = \big(\mu(C_\psi)\big)^{-1}\chi_{[0,\psi]}(\psi')$ (χ_A è la funzione caratteristica dell'insieme *A*), i cui coefficienti sono

$$k_n^{(\psi)} = \big(\mu(C_\psi)\big)^{-1}\frac{2n+1}{2}\int_0^\psi P_n(\cos\psi')\sin\psi' d\psi'.$$

Ancora una volta si ha $f_\psi(\sigma) = \sum \frac{4\pi}{2n+1} k_n^{(\psi)} f_{nm}Y_{nm}(\sigma)$, e i coefficienti $k_n^{(\psi)}$, che tendono a 0 al crescere di *n*, hanno una funzione regolarizzante.

NOTA: poiché per i polinomi di Legendre non ci sono relazioni semplici di ortogonalità discreta come per i seni e i coseni, la discretizzazione degli integrali per il calcolo dei coefficienti dello sviluppo in armoniche sferiche, necessaria per il fatto che si dispone soltanto di dati discreti, dà soltanto risultati approssimati.

Si deve inoltre tenere conto che i dati discreti, distribuiti su un reticolo regolare, sono il risultato del calcolo di medie mobili su piccole aree di dati puntuali sparsi; di conseguenza i coefficienti risentono dell'effetto regolarizzante sopra illustrato.