

## Interpolazione

L'interpolazione è un'operazione matematica di grande importanza nelle scienze geografiche, perché accade spesso di misurare delle quantità di interesse (ad esempio, presenza di un inquinante, quantità di pioggia caduta) in un certo numero di punti sul territorio, e di voler descrivere quelle quantità come funzioni definite in modo continuo su tutto il territorio, che possono poi essere rappresentate come superfici e illustrano quindi anche graficamente la variazione geografica di quelle grandezze.

Naturalmente il voler attribuire ad ogni punto di una regione il valore di una grandezza che in realtà è nota soltanto in un numero finito di punti è in ogni caso un'operazione arbitraria, che si giustifica soltanto se è ragionevole supporre variazioni non troppo brusche di tale grandezza al variare del punto nella regione. Non ha quindi senso utilizzare funzioni interpolanti dall'andamento molto irregolare, che non può essere in alcun modo giustificato dalle informazioni disponibili. Inoltre si pone il problema se i valori misurati debbano essere assunti esattamente dalla funzione cercata (interpolazione esatta), o soltanto in modo approssimato, tenendo conto degli errori da cui inevitabilmente le misure sono affette.

Nonostante nelle applicazioni geografiche siano rilevanti soprattutto le funzioni di variabile 2-dim, e molti aspetti teorici della teoria dell'interpolazione possano essere presentati per funzioni definite in spazi di dimensione arbitraria, gli esempi riguarderanno soprattutto funzioni di variabile 1-dim, le cui proprietà possono essere descritte in modo più semplice e colte intuitivamente in modo più immediato.

Verranno illustrati soprattutto metodi lineari: dati i valori  $y_1, \dots, y_n$ , applicati ai punti  $x_1, \dots, x_n$ , la funzione da determinare sarà della forma  $y(x) = \sum_j a_j(x) y_j$ . In molti casi la funzione  $y(x)$  sarà cercata in uno spazio lineare generato da una base  $\{\phi_k(x) \mid k = 1, \dots, N\}$ . Il problema dell'interpolazione avrà quindi in generale la formulazione  $\sum_1^N c_k \phi_k(x_j) = y_j$  ed ammetterà un'unica soluzione esatta (a meno di singolarità) se  $N = n$ : quanto più numerosi sono i punti da interpolare, tanto più complessa deve essere la funzione interpolante (spazio lineare di dimensione più grande). Se invece si scelgono funzioni più semplici ( $N < n$ ), il problema è sopradeterminato e ci si deve accontentare di un'interpolazione approssimata (ad esempio, ai minimi quadrati:  $\sum_j |y_j - \sum_k c_k \phi_k(x_j)|^2 = \min$ ), ma spesso è più sensato cercare una funzione semplice approssimante piuttosto che una complicata che interpola esattamente. In entrambi i casi la funzione ottenuta dipende linearmente dai valori  $y_j$ .

Il modo più semplice di eseguire un'interpolazione è il cosiddetto metodo del *punto prossimo*, che consiste nell'attribuire al punto  $x$  il valore  $y_j$  corrispondente al punto  $x_j$  più vicino a  $x$ :  $|x - x_j| < |x - x_k| \forall k \neq j$ . In questo modo si ottiene una funzione costante a tratti. In dim. 2 la suddivisione di una regione in porzioni ciascuna delle quali è costituita da tutti i punti più vicini ad un certo  $x_j$  che agli altri  $x_k$  porta alla costruzione dei cosiddetti *poligoni di Thiessen*.

Il metodo del punto prossimo tiene conto in ogni punto  $x$  di uno solo dei valori misurati. Altri metodi prendono in considerazione *medie mobili pesate* dei valori misurati, della forma

$y(x) = \sum w_j(x)y_j$  ,  $w_j(x) > 0$  ,  $\sum w_j(x) = 1$  (“mobili” significa che i pesi dipendono dal punto  $x$ ). In generale i pesi sono funzioni decrescenti della distanza, ad esempio  $w_j(x) \propto |x - x_j|^{-\alpha}$  con  $\alpha > 0$  da scegliere caso per caso. Si noti che con questi pesi a rigore  $y(x)$  non è definita per  $x = x_j$  , ma si verifica facilmente che  $\lim_{x \rightarrow x_j} y(x) = y_j$  , e quindi l’interpolazione è esatta.

Si verifica che per  $\alpha$  molto grande si ottiene un risultato molto vicino a quello ottenuto con il metodo del punto prossimo, mentre per  $\alpha$  molto vicino a 0 si ottiene una funzione che assume valori molto vicini alla media degli  $y_j$  , con l’eccezione di picchi molto stretti in prossimità dei punti  $x_j$  con valori tendenti a  $y_j$  .

E’ possibile anche imporre che l’influenza del valore  $y_j$  sia ristretta ad un’area limitata, ad esempio imponendo  $w_j(x) = 0$  per  $|x - x_j| > d$  .

### Interpolazione polinomiale

Una pratica molto diffusa è l’*interpolazione polinomiale* sia in dim.1, sia in dimensione più grande. Si può eseguire un’interpolazione esatta se il numero dei coefficienti del polinomio è uguale al numero dei valori da interpolare. Ad esempio, in dim.1 un polinomio di grado  $n$  ha  $n+1$  coefficienti, e quindi interpola esattamente  $n+1$  valori. Va però detto che l’andamento di un tale polinomio presenta notevoli oscillazioni, non giustificate dai dati disponibili, e quindi questa procedura non è fisicamente plausibile; è molto più significativo se si riesce ad ottenere (ma non è detto) un’interpolazione approssimata ai minimi quadrati con un polinomio di grado basso, con scarti dell’ordine degli errori di misura ipotizzabili.

In ogni caso, una base di polinomi adatta per l’interpolazione esatta è data dai polinomi  $P_j(x)$  tali che  $P_j(x_j) = 1$  ,  $P_j(x_k) = 0$  per  $k \neq j$  : in questo caso, infatti, il polinomio interpolante è  $P(x) = \sum_j y_j P_j(x)$  . Nel caso 1-dim questi polinomi sono i *polinomi di Lagrange* :

$$P_j(x) = \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_{n+1})}{(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_{n+1})} \quad (\text{di grado } n).$$

### Regressione lineare

Per quanto l’interpolazione approssimata sia un’applicazione standard del metodo dei minimi quadrati, spesso denominata *regressione lineare* , vale la pena riportare esplicitamente le formule.

Sia  $P^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$  un polinomio di grado  $m$  e siano  $x_j$  (il cui numero deve essere maggiore del numero dei coefficienti  $m+1$ ) i punti in corrispondenza dei quali si dispone dei dati da interpolare  $y_j$  . Quindi l’equazione da risolvere in modo approssimato è  $y_j = \sum_{k=0}^m a_k x_j^k$  ; le incognite sono i coefficienti  $a_k$  e i valori noti  $x_j^k$  costituiscono la matrice del sistema. Di solito, per ragioni connesse con la complessità e la stabilità delle procedure numeriche, conviene modificare leggermente la scrittura: dette  $\mu_k = (1/n) \sum_j x_j^k$  le medie delle colonne della matrice, si scrive

$$y_j = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k (x_j^k - \mu_k) + \sum_{k=1}^m a_k \mu_k \equiv b_0 + \sum_{k=1}^m a_k T_{jk} , \quad \text{dove}$$

$$b_0 = a_0 + \sum a_k \mu_k , T_{jk} = x_j^k - \mu_k .$$

In forma matriciale,  $y = eb_0 + Ta = \begin{pmatrix} e & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ a \end{pmatrix} \equiv Ac$ , dove  $e \equiv (1, \dots, 1)^T$ . Assumendo uguali i pesi

delle diverse osservabili, la formula risolutiva dà  $\hat{c} = N^{-1}A^T y$ , dove

$N = A^T A = \begin{pmatrix} e^T \\ T^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & T^T T \end{pmatrix}$  (si ricordi che le colonne di  $T$  hanno media nulla, e quindi

sono ortogonali a  $e$ ). Di conseguenza,  $N^{-1} = \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & (T^T T)^{-1} \end{pmatrix}$ ; inoltre  $A^T y = \begin{pmatrix} \sum y_j \\ T^T y \end{pmatrix}$ , e quindi

$\hat{c} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ (T^T T)^{-1} T^T y \end{pmatrix}$ , dove  $\bar{y}$  è la media degli  $y_j$ , e infine  $\hat{y} = A\hat{c} = e\bar{y} + Uy$ , dove

$U \equiv T(T^T T)^{-1} T^T$ .

E' interessante studiare lo scarto  $y - \hat{y}$ .

$|y - \hat{y}|^2 = |y - e\bar{y} + e\bar{y} - \hat{y}|^2 = |y - e\bar{y}|^2 + |e\bar{y} - \hat{y}|^2 + 2(y - e\bar{y}) \cdot (e\bar{y} - \hat{y}) = |y - e\bar{y}|^2 + |Uy|^2 - 2(y - e\bar{y}) \cdot Uy$

Ora, si verifica facilmente che  $U^T U = U^2 = U$ , e di conseguenza

$|Uy|^2 = Uy \cdot Uy = y \cdot U^T Uy = y \cdot Uy$ . Inoltre  $e\bar{y} \cdot Uy = \bar{y} e^T T (T^T T)^{-1} T^T y = 0$ , dato che  $e^T T = 0$ .

In conclusione  $|y - \hat{y}|^2 = |y - e\bar{y}|^2 - |Uy|^2 = |y - e\bar{y}|^2 - |\hat{y} - e\bar{y}|^2$ , ossia

$|y - e\bar{y}|^2 = |y - \hat{y}|^2 + |\hat{y} - e\bar{y}|^2$ . Il significato di quest'ultima equazione è che, partendo da un

vettore di dati  $y$  e da un modello che ne spiega l'andamento, il modulo quadro del vettore degli

scarti dalla media globale si spezza nella somma di 2 termini, il primo dei quali contiene le

differenze fra i dati e i corrispondenti valori previsti dal modello (*scarti residui*), mentre il secondo

contiene le differenze fra i valori del modello e la media globale (*scarti spiegati*). L'adattamento del

modello ai dati è tanto migliore quanto più grande è il rapporto fra il termine degli scarti spiegati e

quello degli scarti residui; ovviamente questo rapporto aumenta al crescere del grado del polinomio.

Tuttavia, come si è già detto, questo non giustifica che venga artificialmente adottato un modello

di grado elevato, senza giustificazioni fisiche.

**ESEMPIO** : Si consideri il caso particolare di interpolazione approssimata con un polinomio di I

grado:  $y = a_0 + a_1 t$ ; per semplicità si assuma  $\mu_1 = (1/n) \sum t_i = 0$ .

Quindi  $\begin{matrix} y_1 = a_0 + a_1 t_1 \\ \vdots \\ y_n = a_0 + a_1 t_n \end{matrix}$ , ossia  $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ . Si ottiene  $N = A^T A = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \sum t_i^2 \end{pmatrix}$ , e quindi

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & 1/\sum t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ (\sum t_i y_i) / (\sum t_i^2) \end{pmatrix}.$$

I coefficienti stimati vengono poi utilizzati per il calcolo della funzione:  $\hat{y}(t) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t$ . In linea di

principio,  $t$  è arbitrario, anche lontano dai  $t_i$  (che sono distribuiti attorno a 0, dato che  $\mu_1 = 0$ ).

In questo caso, più che di interpolazione, si può parlare di estrapolazione. Tuttavia, l'errore

propagato può diventare molto grande.

Infatti, la matrice di covarianza della stima dei coefficienti è  $C_{\hat{a}} = \sigma_0^2 N^{-1}$ , e, dato che

$$\hat{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix}, \text{ ne consegue } \sigma_{\hat{y}(t)}^2 = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & 1/\sum t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \sigma_0^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{t^2}{\sum t_i^2} \right).$$

## Georeferenziazione e ortorettificazione

Un'applicazione dell'interpolazione polinomiale in dim.2 è la cosiddetta *georeferenziazione* di un'immagine. Si supponga ad esempio di avere un'immagine fotografica di una porzione di territorio (da aereo o da satellite) e di volerla inquadrare in un sistema di riferimento terrestre, in modo da corredare di informazioni metriche l'immagine che di per sé presenta deformazioni sia ottiche sia prospettiche. Se si dispone di una rappresentazione cartografica della regione, si può individuare un certo numero di punti ben identificabili sia sulla carta sia sull'immagine (possibilmente distribuiti in modo uniforme) e determinare di questi punti sia le coordinate cartografiche  $(x_i, y_i)$ , sia le coordinate  $(u_i, v_i)$  rispetto ad un sistema di assi sul piano dell'immagine. Si considerano questi dati come risultanti dal campionamento di una funzione  $(x, y) = F[(u, v)]$ , e si esegue un'interpolazione, ad esempio (ma non necessariamente) polinomiale, attribuendo poi a punti visibili sull'immagine ma non campionati le coordinate cartografiche risultanti dall'interpolazione.

Se per esempio  $x$  e  $y$  sono espresse come polinomi di II grado in  $u$  e  $v$ :

$$x = a_0 + a_1u + a_2v + a_3u^2 + a_4uv + a_5v^2$$

$$y = b_0 + b_1u + b_2v + b_3u^2 + b_4uv + b_5v^2$$

devono essere determinati 12 coefficienti, e quindi devono essere campionati almeno 6 punti. In generale è preferibile un'interpolazione approssimata con un polinomio di grado basso, per evitare oscillazioni non giustificate dai dati. La buona qualità dell'interpolazione può essere verificata esaminando gli scarti non solo nei punti campionati (che sono minimizzati e, nel caso dell'interpolazione esatta, nulli), ma anche in altri punti, detti *punti di prova*, ben individuabili sia sulla carta sia sull'immagine, ma non inseriti nei dati.

Nel caso di immagini digitali, è possibile eseguire un ricampionamento che trasforma l'immagine originaria in un'immagine georeferenzata in cui i toni di grigio o di colore attribuiti ai diversi pixel sono spostati nella posizione corrispondente alle coordinate determinate dalla funzione interpolante.

Questa procedura può essere adottata per esempio se si vuole utilizzare l'immagine a scopo di aggiornamento cartografico. Bisogna però essere consapevoli delle possibili deformazioni presenti nell'immagine georeferenzata, dovute non solo alla scelta della funzione interpolante, che è arbitraria, ma anche al fatto che i punti sul terreno non si trovano su una superficie piana, e la loro posizione dipende sia dalla curvatura terrestre sia dai dislivelli del terreno, i cui effetti sull'accuratezza della georeferenziazione sono illustrati dai seguenti esempi numerici elementari.

**ESEMPIO 1 (figura):** Si supponga che all'istante della presa l'asse dello strumento di ripresa punti verso il terreno in direzione verticale, e che il centro di presa sia ad altezza  $h_0$  (ad esempio, 10000m per un aereo, oppure 300km per un satellite). Si assuma inoltre che la superficie di riferimento (quota 0) sia piana e ortogonale all'asse. Se un punto  $P$  a quota  $h$  viene osservato con un angolo  $\alpha$  rispetto alla verticale, la sua posizione planimetrica è spostata di  $h \sin \alpha$  rispetto alla posizione che avrebbe se fosse a quota 0 e venisse osservato con lo stesso angolo.

Ad esempio, se  $h_0 = 300km$ ,  $h = 300m$ ,  $\alpha = 10^\circ$  (quindi  $P$  dista circa 50km dal punto  $P_0$  piede della verticale passante per il centro di presa), se non si tiene conto della quota  $h$  di  $P$ , si commette un errore di circa 50m nella sua posizione planimetrica.

Si supponga ora che la superficie di riferimento non sia un piano ma una sfera di raggio  $R$  tangente ad esso in  $P_0$  (figura), e che l'arco da  $P_0$  alla proiezione di  $P$  sulla sfera corrisponda ad un angolo al centro  $\theta$ . Allora la separazione della sfera dal piano in corrispondenza dell'estremo dell'arco è  $R(1 - \cos\theta) \cong R\theta^2/2$  se  $\theta$  è piccolo. Per esempio, se  $R \cong 6000\text{km}$  (sfera terrestre) e l'arco è lungo  $50\text{km}$ , allora  $\theta \cong 30' \cong 8.5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ , e la separazione fra sfera e piano è circa  $200\text{m}$ . Di conseguenza, l'errore planimetrico che si commette ignorando la curvatura (ossia riferendosi al piano anziché alla sfera) è di circa  $35\text{m}$ .

**ESEMPIO 2 (figura):** Come esempio elementare di georeferenziazione, si supponga che il centro di presa sia ad una quota  $h_0=10000\text{m}$ , che l'asse dello strumento di ripresa sia verticale, che la superficie di riferimento sia piana, e che siano note le posizioni di 2 punti le cui proiezioni sul piano di riferimento stanno su una retta (ad esempio l'asse  $X$ ) che contiene anche il piede della verticale del centro di presa (la cui ascissa  $x_0=10\text{km}$  si suppone non nota). Questi punti sono  $P_1$ , con ascissa  $X_1=13\text{km}$  e quota  $h_1=600\text{m}$ , e  $P_2$ , con ascissa  $X_2=19\text{km}$  e quota  $h_2=200\text{m}$ . Si assume inoltre che la pendenza da  $P_1$  a  $P_2$  sia costante, per cui la quota del punto  $P$  con ascissa  $X=16\text{km}$  (non nota) è  $h=400\text{m}$ . Si vuole appunto determinare  $X$  utilizzando misure eseguite sull'immagine fotografica.

Se la proiezione del centro di presa è nell'origine della lastra e l'asse  $x$  della lastra è parallelo all'asse  $X$  sul terreno, le ascisse delle immagini sulla lastra dei punti  $P_1, P, P_2$  (che vengono misurate) sono proporzionali rispettivamente ai numeri

$$\frac{13-10}{10-0.6} = \frac{3}{9.4} = 0.319, \quad \frac{16-10}{10-0.4} = \frac{6}{9.6} = 0.625, \quad \frac{19-10}{10-0.2} = \frac{9}{9.8} = 0.918.$$

Quindi, se si ignorano le quote di  $P_1$  e  $P_2$ , l'ascissa  $X$  di  $P$  si ottiene da

$$\frac{X-13}{19-13} = \frac{0.625-0.319}{0.918-0.319}, \quad \text{da cui } X=16.065 \text{ (con un errore di } 65\text{m)}.$$

Se invece si utilizzano le quote note di  $P_1$  e  $P_2$  e si assume che la pendenza sia costante, ricordando le relazioni soddisfatte dalle coordinate lastra, si ottiene

$$\frac{X-X_1}{X_2-X_1} = \frac{x \cdot (10-h) - x_1 \cdot 9.4}{x_2 \cdot 9.8 - x_1 \cdot 9.4}; \quad \text{d'altra parte } h \text{ soddisfa la relazione } \frac{h-h_1}{h_2-h_1} = \frac{X-X_1}{X_2-X_1}.$$

Mettendo insieme queste 2 relazioni, si ottiene un'equazione lineare in  $X$  che dà la soluzione corretta  $X=16$ .

La determinazione della posizione planimetrica dei punti a partire dalla loro posizione sull'immagine, tenendo conto dell'andamento altimetrico del terreno, è detta *ortorettificazione*.

### Interpolazione con funzioni trigonometriche

Un problema interessante di interpolazione di dati geografici è quello in cui le grandezze sono espresse in funzione delle coordinate geografiche  $\phi, \lambda$  (latitudine e longitudine). Di per sé questo problema non ha rilevanti particolarità concettuali: si tratta di scegliere una base opportuna  $\{Y_k(\phi, \lambda)\}$  per lo spazio lineare delle funzioni di  $\phi, \lambda$ ,  $-(\pi/2) \leq \phi \leq \pi/2$ ,  $-\pi < \lambda \leq \pi$ , e risolvere il sistema lineare (eventualmente ridondante)  $y_j = \sum c_k Y_k(\phi_j, \lambda_j)$ . Il problema si riconduce quindi all'inversione della matrice  $\{A_{jk} = Y_k(\phi_j, \lambda_j)\}$  che può essere numericamente più o meno complesso in base alla scelta delle funzioni  $Y_k$  e alla distribuzione dei punti  $(\phi_j, \lambda_j)$ .

Questo problema non viene qui esaminato in dettaglio, ma, per dare un'idea di situazioni particolari che si possono presentare e che danno luogo a semplificazioni numeriche, si analizza un problema analogo in dim.1, ossia quello dell'interpolazione con polinomi trigonometrici. Si considera l'intervallo  $[0, 2\pi]$  e si scelgono come base le funzioni  $\{\cos kx, 0 \leq k \leq N; \sin kx, 1 \leq k \leq N\}$ . Si

supponga di avere dati equispaziati nei punti  $x_j = \frac{\pi}{2N} + j \frac{\pi}{N}$ ,  $j = 0, \dots, 2N-1$ . Si pone quindi il problema di interpolazione esatta  $y(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^N b_k \sin kx$ ,  $y(x_j) = y_j$ . Il termine in  $\cos Nx$  non interviene, perché  $\cos Nx_j$  è sempre nullo, e di conseguenza  $a_N$  è indeterminato. In questo modo si hanno esattamente  $2N$  coefficienti e  $2N$  dati. Naturalmente il problema può essere risolto con l'inversione di una matrice  $2N \times 2N$ , ma in questo caso particolare è possibile evitare questa operazione numericamente pesante.

Sono infatti valide le uguaglianze

$$\sum_{j=0}^{2N-1} \cos kx_j \cos \ell x_j = N \delta_{k\ell} (1 + \delta_{k0}) \quad (k, \ell = 0, \dots, N-1)$$

$$\sum_{j=0}^{2N-1} \sin kx_j \sin \ell x_j = N \delta_{k\ell} (1 + \delta_{kN}) \quad (k, \ell = 1, \dots, N)$$

$$\sum_{j=0}^{2N-1} \cos kx_j \sin \ell x_j = 0$$

$$\left( \delta_{k\ell} = \begin{cases} 1 & \text{per } k = \ell \\ 0 & \text{per } k \neq \ell \end{cases} \right)$$

(si possono provare in modo semplice usando le espressioni esponenziali di seno e coseno e la regola di somma di progressioni geometriche)

Di conseguenza

$$\sum_{j=0}^{2N-1} y(x_j) \cos \ell x_j = N a_\ell (1 + \delta_{\ell 0})$$

$$\sum_{j=0}^{2N-1} y(x_j) \sin \ell x_j = N b_\ell (1 + \delta_{\ell N})$$

Quindi i coefficienti del polinomio trigonometrico interpolante sono stati ricavati senza dover invertire alcuna matrice.

Triangolazione

Nello studio del territorio, come si è già accennato, accade spesso di interpolare dati discreti ottenuti da misurazioni eseguite in punti isolati del terreno, in modo da ottenere una superficie che viene usata per rappresentare l'andamento della grandezza misurata.

Un procedura semplice spesso usata è la *triangolazione*, che consiste nel costruire triangoli piani con vertici in 3 punti dello spazio 3-dim. che rappresenta le misure eseguite (le coordinate  $x, y$  rappresentano la posizione planimetrica del punto in cui è stata eseguita la misura, la coordinata  $z$  rappresenta il valore ottenuto dalla misura). Le coordinate  $z$  dei vari punti del triangolo costituiscono un'interpolazione della grandezza misurata, in corrispondenza del punto planimetrico ottenuto con una proiezione sul piano  $xy$ .

Il problema è come scegliere fra tutti i punti di misura le terne da utilizzare come vertici dei diversi triangoli. La regola che viene generalmente seguita è quella della *triangolazione di Delaunay*, che consiste nello scegliere fra le proiezioni dei punti sul piano  $xy$  delle terne tali che le circonferenze passanti per i 3 punti di tali terne non racchiudano al loro interno alcun altro punto di misura. Si può verificare che questa scelta produce in generale sul piano  $xy$  triangoli non troppo allungati.

Quanto al procedimento per ottenere questo risultato, esso ha una relazione con la costruzione dei poligoni di Thiessen. Infatti i lati della triangolazione di Delaunay si ottengono congiungendo sul piano  $xy$  punti contenuti in poligoni di Thiessen adiacenti.

La triangolazione di Delaunay viene fatta sul piano  $xy$ , e poi i vertici vengono riportati in quota, ottenendo così una superficie 3-dim costituita di facce triangolari. Se le quote di vertici vicini sono molto diverse, i corrispondenti triangoli possono risultare molto allungati nella direzione dell'asse  $z$ . In generale la procedura funziona bene per insiemi di dati che non presentano grandi salti, mentre deve essere usata con cautela dove si presentano notevoli irregolarità.

Per fissare le idee, si assuma che le grandezze misurate siano proprio le quote dei punti (*modello digitale del terreno*). E' allora evidente che, per avere una rappresentazione fedele del terreno, i punti di misura devono essere molto fitti dove il terreno è irregolare, mentre possono essere più radi dove il terreno è liscio. Naturalmente niente impedisce che i punti siano fitti ovunque, come avviene ad esempio per i dati di un rilievo eseguito con il laser scanner da aereo. Tuttavia in questo caso si ha un'inutile occupazione di memoria, dato che, dove il terreno è liscio, le quote fornite come dati in una gran quantità di punti sono poco diverse da quelle che si possono ottenere con l'interpolazione.

Si tratta quindi di definire procedure che consentano di ottenere una densità di punti commisurata con la regolarità del terreno. In sostanza possono essere seguite due strade alternative:

- *decimazione*: si esegue prima una triangolazione su tutti i punti misurati; successivamente la quota di ogni punto viene confrontata con quella che si otterrebbe per interpolazione se il punto venisse eliminato e fosse fatta la triangolazione di Delaunay sui punti restanti, e, nel caso che la differenza sia al di sotto di una certa soglia, il punto viene effettivamente eliminato. Il procedimento si arresta quando, in corrispondenza di quella soglia, nessun punto può più essere eliminato.
- *accrescimento*: si parte da un unico grande triangolo che racchiude al suo interno tutti i punti di misura. Successivamente si aggiunge ad ogni passo il punto di misura che presenta lo scarto maggiore fra il valore della misura eseguita e l'interpolazione ottenuta con la triangolazione di Delaunay costruita fino a quel passo. Il procedimento si arresta quando tutti gli scarti sono al di sotto di una data soglia.

Si noti che l'eliminazione o l'aggiunta di punti può comportare la ridefinizione della triangolazione di Delaunay anche eliminando lati già presenti e sostituendoli con altri.