Trasformata di Fourier

1. Proprietà generali

DEFINIZIONE: si dice *trasformata di Fourier* di una funzione $h(t)$ definita in $\mathbf{R}$ la funzione $H(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i2\pi\nu t}dt$. La variabile t indica il *dominio temporale*, la variabile ν il *dominio delle frequenze* o *spettrale*.
Come si vede, la trasformata di Fourier è un operatore lineare (indicato con **F**), che è certamente definito nello spazio, indicato con $L^1(\mathbf{R})$, di tutte le funzioni tali che $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < +\infty$.
Inoltre si verifica che, se $h \in L^1(\mathbf{R})$, allora $H(\nu)$ è continua e limitata in $\mathbf{R}$.

Se poi h e g sono due funzioni in $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, e H e G sono le loro trasformate, allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\overline{g(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} H(\nu)\overline{G(\nu)}d\nu \quad (\textit{identità di Parseval}) \tag{1.1}$$

Di conseguenza, la restrizione a $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ dell'operatore **F** ha immagine in $L^2(\mathbf{R})$, e $\|\mathbf{F}h\| = \|h\|$. Poiché $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ è denso in $L^2(\mathbf{R})$, **F** può essere esteso per continuità a tutto $L^2(\mathbf{R})$, ed è *isometrico*, ossia conserva la norma.

La trasformata inversa o *antitrasformata*, ossia l'operatore che consente di ritrovare h a partire da H, ha la forma $h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} H(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu$. L'operazione di calcolo della trasformata di Fourier, con cui si ricava il contenuto in frequenza di un segnale temporale, è detta *analisi*, la sua inversa, con cui si mettono assieme i contributi di tutte le frequenze per ricavare l'evoluzione temporale del segnale, è detta *sintesi*.

NOTA: l'analisi è un'operazione simile alla determinazione dei coefficienti di una serie di Fourier a partire dalla sua somma. La differenza essenziale è che nella serie di Fourier l'intervallo di integrazione è limitato, mentre nella trasformata è tutto **R**, e d'altra parte i coefficienti della serie di Fourier sono discreti, mentre la trasformata varia nel continuo. In qualche modo la trasformata può essere vista come il limite della serie quando l'intervallo tende a diventare l'intera retta.
Si perde però la struttura di spazio di Hilbert. Mentre le funzioni a cui si applica la trasformata sono in $L^1(\mathbf{R})$ o in $L^2(\mathbf{R})$, le funzioni $e^{\pm i2\pi\nu t}$ non appartengono a questi spazi, e non sono più una sequenza numerabile, ma un continuo. Rimane la dualità analisi-sintesi, ossia la possibilità di passare dal dominio temporale a quello delle frequenze e viceversa.

NOTA: senza entrare nel dettaglio, si può affermare che, come per i coefficienti della serie di Fourier, sussiste una relazione fra la regolarità di una funzione e l'ordine di infinitesimo della sua trasformata al tendere della variabile all'infinito. Data la simmetria fra trasformata e antitrasformata, la relazione è reciproca.

2. Convoluzione

Sia $h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ (*prodotto di convoluzione*).

Allora $H(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i2\pi\nu t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i2\pi\nu(t-\tau)} f(t-\tau)\cdot e^{-i2\pi\nu\tau} g(\tau)=$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i2\pi\nu\tau} g(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-i2\pi\nu u} f(u)=G(\nu)F(\nu).$$

Ossia, la trasformata di Fourier trasforma una convoluzione in un prodotto ordinario.

Questo risultato ha grande importanza in teoria dei segnali. Infatti spesso la trasformazione di un segnale eseguita da un apparato elettronico può essere espressa come convoluzione nel dominio temporale, e il fatto che nel dominio spettrale diventa un prodotto ordinario ne facilita l'interpretazione.

3. Principio di indeterminazione

In termini qualitativi, il principio di indeterminazione esprime in fatto che, quanto più una funzione è localizzata nel dominio temporale, tanto più la sua trasformata è dispersa nel dominio spettrale, e viceversa.

Si riportano qui due risultati:

1. Si supponga che per una funzione h in $L^2(\mathbf{R})$ esistano gli integrali

$$\mu_h=\frac{1}{\|h\|^2}\int_{-\infty}^{\infty} t|h(t)|^2 dt \qquad \text{(media)}$$

$$\sigma_h^2=\frac{1}{\|h\|^2}\int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu_t)^2|h(t)|^2 dt \qquad \text{(varianza)}$$

e così pure per la sua trasformata H, per cui si definiscono media μ_H e varianza σ_H^2.

Allora $\sigma_h^2\sigma_H^2 \geq \frac{1}{4}$.

Poiché σ_h^2 e σ_H^2 danno una misura della dispersione di h e H intorno alle loro medie, questo risultato significa che, quanto più una delle due è piccola, tanto più l'altra deve essere grande.

2. Inoltre, se h ha supporto limitato, H non può essere identicamente nulla su un intervallo.

Come esempio, si consideri ora la famiglia di funzioni $\delta_\varepsilon(t)=\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2}$.

E' facile vedere che, se f è una funzione limitata e continua per t=0, allora $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_\varepsilon(t)dt=f(0)$.

Di conseguenza, $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)e^{-i2\pi\nu t}dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\hat{\delta}_\varepsilon(\nu)=1$ (il simbolo $\wedge$ indica la trasformata di Fourier).

La convergenza è puntuale rispetto alla variabile ν e uniforme in ogni intervallo limitato.

Quanto più ε diventa piccolo, tanto più la funzione δ_ε si localizza (ha la forma di un picco, che assume un valore alto per t=0, ma valori molto piccoli al di fuori di un piccolo intorno di t=0), mentre la sua trasformata di Fourier si avvicina sempre più alla funzione costantemente uguale a 1. Ossia, <u>per ottenere un picco molto stretto nel dominio temporale, bisogna sovrapporre con peso quasi uguale una gran quantità di frequenze</u> (e viceversa). Quindi la trasformata di Fourier non è lo strumento adatto per fare un'analisi localizzata contemporaneamente nel dominio temporale e in quello spettrale (come sarebbe necessario, ad esempio, in un brano musicale).

Come ulteriore esempio si consideri la famiglia di gaussiane $f_\alpha(t) = e^{-\alpha t^2}$, $\alpha > 0$, che sono tanto più concentrate intorno a $t = 0$ quanto più grande è α .

Si ha $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-i2\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t^2 + i\frac{2\pi}{\alpha}\nu t)} dt = e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t + i\frac{\pi}{\alpha}\nu)^2} dt = Ce^{-\frac{\pi^2\nu^2}{\alpha}}$, dato che $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t+i\frac{\pi}{\alpha}\nu)^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt$ è indipendente da ν. Quindi le trasformate di Fourier sono ancora Gaussiane, ma questa volta il parametro α è al denominatore dell'esponente, e quindi sono tanto più concentrate intorno a $t = 0$ quanto più piccolo è α .

4. Trasformata di Fourier discreta

Quanto visto finora mette in relazione due funzioni h e H entrambe definite nel continuo. Poiché tuttavia in generale i segnali sono campionati in un insieme discreto di punti, è importante capire quali informazioni si possono ricavare dalla conoscenza soltanto di questi valori.

Se si considera ad esempio l'insieme di punti $\{t = kT \,, k \in \mathbf{Z}\}$ (**Z** = insieme dei numeri interi relativi), la formula della antitrasformata fornisce immediatamente

$$h(kT) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\nu) e^{i2\pi\nu kT} d\nu \tag{4.1}$$

A partire dalla sequenza $\{h(kT)\}$ si costruisca la serie di Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT) e^{-i2\pi\nu kT} \equiv \tilde{X}(\nu) \tag{4.2}$$

$\tilde{X}(\nu)$ è una funzione periodica di periodo $1/T$, e $h(kT) = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \tilde{X}(\nu) e^{i2\pi\nu kT} d\nu$ (4.3)

Per (4.1)

$$h(kT) = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2T}+\frac{j}{T}}^{\frac{1}{2T}+\frac{j}{T}} H(\nu) e^{i2\pi\nu kT} d\nu = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} H(\nu + \frac{j}{T}) e^{i2\pi(\nu+\frac{j}{T})kT} d\nu = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \sum_{-\infty}^{\infty} H(\nu + \frac{j}{T}) e^{i2\pi\nu kT} d\nu \tag{4.4}$$

Confrontando con (4.3) si ottiene $$T\tilde{X}(\nu)=\sum_{-\infty}^{\infty}H(\nu+\frac{j}{T}) \qquad (4.5)$$

Se il supporto di H è interamente contenuto nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2T},\frac{1}{2T}\right]$, un solo termine contribuisce alla sommatoria in (4.5). Quindi

$$\sum h(kT)e^{-i2\pi\nu kT} = \frac{1}{T}\tilde{H}(\nu) \qquad (4.6)$$

dove $\tilde{H}(\nu)$ è la funzione periodica di periodo $1/T$ che coincide con $H(\nu)$ nell'intervallo [-1/2T,1/2T]. D'altra parte,

$$h(t)=\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}}H(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu = T\sum h(kT)\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}}e^{i2\pi\nu(t-kT)}d\nu=\sum h(kT)\frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-kT)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)} \qquad (4.7)$$

ossia, $h(t)$ è completamente determinato dai suoi valori nei punti $t=kT$.

NOTA Posto $\varphi(t)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{T}t}{\frac{\pi}{T}t}$, le funzioni $\varphi_k(t)=\varphi(t-kT)$, $k\in\mathbf{Z}$ sono fra di loro ortogonali in $L^2(\mathbf{R})$. Per provarlo, si applica l'identità di Parseval, tenendo conto che le loro trasformate di Fourier, $(\mathbf{F}\varphi_k)(\nu)=T\chi_{[-1/2T,1/2T]}(\nu)e^{-i2\pi kT\nu}$, come si può verificare facilmente con il calcolo diretto, sono ortogonali.
La formula (4.7) mostra che le funzioni φ_k costituiscono una base ortogonale per lo spazio delle funzioni la cui trasformata di Fourier ha supporto contenuto nell'intervallo [-1/2T,1/2T].

Si supponga ora che il supporto di H sia contenuto in un intervallo I che a sua volta è strettamente contenuto in [-1/2T,1/2T]. Si ricorda che T è l'intervallo di campionamento della funzione h . Se l'intervallo I ha ampiezza minore di $1/T$, questo significa che sarebbe stato possibile un campionamento ad intervalli più ampi, senza determinare sovrapposizione fra gli addendi della sommatoria in (4.5). Ci si trova quindi in una situazione di *oversampling*. In questo caso, assumendo che gli estremi di I siano distinti da quelli di [-1/2T,1/2T], è possibile trovare una funzione Q nulla fuori di [-1/2T,1/2T] , uguale a 1 in I e regolare su tutto **R**, e si può porre

$$h(t)=\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}}H(\nu)Q(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu=T\sum h(kT)\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}}Q(\nu)e^{i2\pi\nu(t-kT)}d\nu=\sum h(kT)q(t-kT) \qquad (4.8)$$

dove q è l'antitrasformata di Q .
Qualitativamente si può affermare che, poiché Q è regolare, q tende rapidamente a 0, e quindi soltanto un piccolo numero di termini contribuisce significativamente alla sommatoria in (4.8). Questo fatto è importante, dato che in pratica si conosce sempre soltanto un numero finito di valori campionati di h.

NOTA: Nella formula (4.7) l'ultima uguaglianza è in ogni caso vera, mentre la seconda è valida solo se lo spettro di H è interamente contenuto nell'intervallo [-1/2T,1/2T]. In caso contrario, nella somma in (4.5) diversi termini contribuiscono per ogni valore di ν.
D'altra parte, la formula (4.4) (in cui, si noti, l'ultimo passaggio vale per $t = kT$, ma non per un t generico) ci dice che, se si cerca di esprimere $h(kT)$ in termini della parte di spettro contenuta in [-1/2T,1/2T], nel caso generale, per ogni ν, vengono a sommarsi contributi della parte di spettro al di fuori di questo intervallo (*aliasing*).

Se ora si tronca lo spettro di $h(t)$ azzerandolo al di fuori di [-1/2T,1/2T]: $\tilde{H}(\nu) = H(\nu)\chi_{[-1/2T,1/2T]}(\nu)$, si ottiene lo spettro del prodotto di convoluzione $\tilde{h}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau)h(\tau)d\tau$, dove φ è definita come sopra. Questa funzione ha la proprietà di minimizzare $\|h - \tilde{h}\|$, fra tutte le funzioni con spettro contenuto in [-1/2T,1/2T]. Infatti $\int_{-\infty}^{\infty} \left|h(t) - \tilde{h}(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|H(\nu) - \tilde{H}(\nu)\right|^2 d\nu = \int_{|\nu|\le 1/2T} \left|H(\nu) - \tilde{H}(\nu)\right|^2 d\nu + \int_{|\nu|>1/2T} \left|H(\nu)\right|^2 d\nu$; il primo termine della somma è nullo, e il secondo dipende solo da h.

NOTA: In generale, come si è già osservato, si ha a disposizione soltanto un numero finito di dati, ad esempio $h(kT)$, $k = -N,\cdots,N$, con cui si può costruire la serie di Fourier finita $\sum_{-N}^{N} h(kT)e^{-i2\pi\nu kT} \equiv \tilde{X}^{(N)}(\nu)$, i cui coefficienti sono $\begin{cases} h(kT) & k = -N,\cdots,N \\ 0 & |k| > N \end{cases}$. Si può quindi procedere come se si fosse estratto un campione infinito (ma identicamente nullo per $|k| > N$) dalla funzione $h^{(N)}(t) = h(t)\chi_{\left[-(N+\frac{1}{2})T,(N+\frac{1}{2})T\right]}(t)$.
Per quanto visto all'inizio del paragrafo, $H^{(N)} = \mathbf{F}h^{(N)} = H * \varphi^{(N)}$, dove

$$\varphi^{(N)}(\nu) = \left(\mathbf{F}\chi_{\left[-(N+\frac{1}{2})T,(N+\frac{1}{2})T\right]}\right)(\nu) = \frac{\sin 2\pi\nu(N+\frac{1}{2})T}{\pi\nu}$$

; inoltre $T\tilde{X}^{(N)}(\nu) = \sum H^{(N)}(\nu - \frac{j}{T})$.
Si noti che, anche se lo spettro di h è contenuto in [-1/2T,1/2T], non lo è quello di $h^{(N)}$; quindi non è possibile una ricostruzione esatta di h a partire da un suo campione finito.

Trasformata di Fourier Veloce

Con la sigla FFT (*Fast Fourier Transform*) si indica un modo veloce di calcolare un insieme discreto di valori della trasformata a partire da un insieme discreto di valori campionati della funzione (o viceversa). In sostanza, data la formula $f_j = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i\frac{2\pi}{N}kj}$, $j = 0,\cdots,N-1$, si tratta di calcolare in modo efficiente gli F_k a partire dagli f_j (ossia, costruire un operatore lineare $\mathbf{F}$ che trasforma il vettore N-dim. f nel vettore N-dim. F). In questo paragrafo viene fornito uno schema dei diversi passi della procedura, nel caso particolare $N = 2^p$.

- $$\begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \\ f_2 \\ 0 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

- se $\mathbf{F}\begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-2} \end{pmatrix}$, allora $\mathbf{F}\begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} F_0 \\ \vdots \\ F_{N-2} \\ F_0 \\ \vdots \\ F_{N-2} \end{pmatrix}$; analogamente,
- se $\mathbf{F}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix}$, allora $\mathbf{F}\begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_{N-1} \\ -G_1 \\ \vdots \\ -G_{N-1} \end{pmatrix}$, dove $G_\nu = e^{i\frac{\pi}{N}(\nu-1)} F_\nu$
- quindi si può applicare la trasformazione separatamente ai vettori con le sole componenti di posto pari e con solo quelle di posto dispari e poi sommare: $\mathbf{F}(a+b) = \mathbf{F}(a) + \mathbf{F}(b)$.
- se $N = 2^p$, l'operazione di decomposizione sopra descritta può essere iterata, fino ad avere una somma di vettori con solo 2 componenti non nulle
- $\mathbf{F}\begin{pmatrix} f_a \\ f_b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_a + f_b \\ f_a - f_b \end{pmatrix}$
- si procede a ritroso, reintroducendo le componenti nulle e applicando le regole viste sopra, finché non si è ricostruito l'intero vettore originario.