Trasformata di Fourier a finestra

Come si è visto, la trasformata di Fourier viene interpretata in teoria dei segnali come uno strumento per analizzare il contenuto in frequenza di una funzione definita nel dominio temporale, che viene espressa come sovrapposizione lineare di funzioni ad andamento sinusoidale. Poiché le frequenze possono assumere qualsiasi valore reale, la sovrapposizione assume la forma di un integrale. Essenziale in questa operazione è la dualità analisi-sintesi, che garantisce la possibilità da un lato di calcolare, a partire dalla forma del segnale, i coefficienti che definiscono i contributi delle diverse frequenze, dall'altro di ricostruire il segnale a partire da questi contributi. Si è visto che, nel caso della trasformata di Fourier l'analisi e la sintesi sono espresse da formule sostanzialmente simili, e si genera quindi una simmetria fra il dominio temporale e quello delle frequenze.

Si è vista anche l'impossibilità di avere localizzazione sia nel dominio temporale sia in quello delle frequenze: per ottenere un segnale con una durata temporale piccola (quindi identicamente nullo al di fuori di un intervallo), sono necessari contributi significativi di frequenze arbitrariamente grandi e, viceversa, utilizzando solo frequenze appartenenti ad un piccolo intervallo, si ottiene un segnale di ampiezza non trascurabile in un intervallo di tempo molto lungo.

Una possibile via per aggirare questo problema è l'uso della *trasformata di Fourier a finestra*, in cui, invece delle funzioni di base monocromatiche $e^{-i2\pi t\nu}$, si utilizzano funzioni della forma $\varphi_{\nu,t}(u) = e^{i2\pi\nu u}\varphi(u-t)$, dove $\varphi(u)$ è la funzione caratteristica di un intervallo limitato. Queste funzioni dipendono da 2 indici, dei quali ν definisce la localizzazione nel dominio delle frequenze e t la localizzazione nel dominio temporale; esse non sono monocromatiche, e ν rappresenta la frequenza centrale, quella che dà il contributo più importante.

Senza entrare nel dettaglio di tutte le proprietà matematiche, ci si limita qui a descrivere sommariamente il meccanismo di analisi-sintesi. Dato un segnale $f(u)$, l'operazione di analisi è definita da

$$\tilde{f}(\nu,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi_{\nu,t}(u)}\, f(u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu u}\,\overline{\varphi(u-t)}\, f(u)\,du$$

$\tilde{f}(\nu,t)$ è quindi la trasformata di Fourier di $\overline{\varphi(u-t)}\, f(u)$, e di conseguenza

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\nu,t) e^{i2\pi\nu u}\,d\nu = \overline{\varphi(u-t)}\, f(u)\,.$$

Moltiplicando per $\varphi(u-t)$ e integrando si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\,|\varphi(u-t)|^2\, f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\nu\, e^{i2\pi\nu u}\, \tilde{f}(\nu,t)\varphi(u-t)\,,$$

da cui si ricava la formula di sintesi:

$$f(u) = \frac{1}{\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R})}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\nu\, e^{i2\pi\nu u}\varphi(u-t)\,\tilde{f}(\nu,t) = \frac{1}{\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R})}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\nu\,\varphi_{\nu,t}(u)\,\tilde{f}(\nu,t)$$

Wavelets

Un possibile modo di scegliere una famiglia di funzioni per attivare una procedura di analisi-sintesi consiste nel partire da una funzione $\psi(u)$ (che in linea di principio può appartenere ad una classe piuttosto ampia, ma che viene scelta in modo opportuno in base alle sue caratteristiche di localizzazione e di oscillazione), e nel costruire una famiglia

$$\psi_{s,t}(u) = |s|^{-p}\ \psi\left(\frac{u-t}{s}\right)$$

ottenuta dalla funzione originaria con traslazioni e cambiamenti di scala. I parametri s e t in generale variano nel continuo; p è fisso nell'ambito della famiglia, ed è in linea di massima arbitrario. Ad esempio, la scelta p=1/2 garantisce la costanza della norma di $\psi_{s,t}$ in $L^2(\mathbf{R})$.

L'operazione di analisi è definita da

$$\tilde{f}(s,t) = \int_{-} du\ \overline{\psi_{s,t}(u)}\, f(u) \ .$$

Senza entrare nei dettagli, si enuncia il seguente risultato:
l'operazione di sintesi può essere definita se ψ verifica la *condizione di ammissibilità*

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{|\xi|} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \equiv C < +\infty$, dove $\hat{\psi}$ è la trasformata di Fourier di ψ . In tal caso si ha

$$f(u) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty} ds\, s^{2p-3} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \psi_{s,t}(u)\, \tilde{f}(s,t) \ .$$

NOTA: la condizione di ammissibilità implica $\lim_{\xi\to 0}\hat{\psi}(\xi) = 0$. Quindi, se $\hat{\psi}$ è continua (cosa certamente vera se $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(u)|\, du < +\infty$), deve essere $\hat{\psi}(0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) du = 0$.

NOTA: Come si è visto, le trasformate finora esaminate (trasformata di Fourier, trasformata di Fourier a finestra, trasformata wavelet) realizzano operazioni di analisi-sintesi che da un lato consentono di calcolare determinati coefficienti con operazioni lineari sulla funzione data, dall'altro ricostruiscono la funzione utilizzando i coefficienti calcolati per costruire una sovrapposizione lineare di una data famiglia di funzioni. E' proprio questa seconda operazione che giustifica l'interpretazione dei coefficienti calcolati come contributi corrispondenti a determinate caratteristiche qualitative (nei casi esaminati, il contenuto in frequenza o la localizzazione). D'altronde, si è visto che in tutti i casi trattati gli ingredienti utilizzati per costruire l'operazione di analisi ($e^{-i\nu t}$, $\varphi_{\nu,t}(u)$, $\psi_{s,t}(u)$) si ritrovano anche nella sintesi, e viene da chiedersi se questo sia un fatto generale.

Nella teoria della serie di Fourier si è visto che la possibilità di usare gli stessi ingredienti per analisi e sintesi: $f \mapsto (f,\varphi_n) \mapsto f = \sum (f,\varphi_n)\varphi_n$ è legata alla scelta di una base ortonormale.

Nel seguito vengono esaminate due situazioni in dimensione finita che illustrano come sia possibile costruire operazioni di analisi sintesi usando famiglie di vettori non ortonormali e addirittura ridondanti (ossia non linearmente indipendenti).

1: sia $\{\mathbf{u}_i \mid i = 1,\cdots,n\}$ una base in $\mathbf{R}^n$. Allora la matrice $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{pmatrix}$ è non singolare e ha inversa $\mathbf{V}$. Siano $\mathbf{v}_i$ le colonne di $\mathbf{V}$. Allora, per ogni $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{z} = \mathbf{VUz} = \mathbf{U}^T\mathbf{V}^T\mathbf{z}$, ossia $\mathbf{z} = \sum (\mathbf{u}_i, \mathbf{z})\mathbf{v}_i = \sum (\mathbf{v}_i, \mathbf{z})\mathbf{u}_i$. Quindi in questo caso l'analisi e la sintesi sono realizzate con ingredienti diversi. Si dice che $\{\mathbf{u}_i\}$ e $\{\mathbf{v}_i\}$ sono *basi biortogonali.*

2: più in generale, si scelgano n vettori $\{\mathbf{u}_i \mid i = 1,\cdots,n\}$ in $\mathbf{R}^k$, $k<n$. Ovviamente questi vettori non possono essere linearmente indipendenti, ma si assuma che la matrice $\mathbf{U}$ costruita come sopra

abbia rango massimo. Allora $\mathbf{G} = \mathbf{U}^T\mathbf{U}$ è invertibile. Siano $\mathbf{w}_i$ le colonne di $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{U}^T \equiv \tilde{\mathbf{U}}^T$. Evidentemente $\mathbf{z} = (\mathbf{G}^{-1}\mathbf{U}^T)\mathbf{U}\mathbf{z} = \sum(\mathbf{u}_i, \mathbf{z})\mathbf{w}_i$.

D'altra parte, $\tilde{\mathbf{U}}^T\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}^{-1}$, e quindi $\mathbf{z} = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{U}}^T\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{z} = \mathbf{U}^T\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{z} = \sum(\mathbf{w}_i, \mathbf{z})\mathbf{u}_i$.

Si vede quindi che, anche partendo da una famiglia ridondante di vettori, è possibile costruire una procedura di analisi-sintesi, e che inoltre i vettori usati per l'analisi sono diversi da quelli usati per la sintesi.

Inoltre, esistono 2 costanti positive A e B tali che $A\|\mathbf{z}\|^2 \le \sum|(\mathbf{z}, \mathbf{u}_i)|^2 \le B\|\mathbf{z}\|^2$.

Per provarlo, si consideri il rapporto $\dfrac{\sum|(\mathbf{z}, \mathbf{u}_i)|^2}{\|\mathbf{z}\|^2} = \sum\left|\left(\dfrac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|}, \mathbf{u}_i\right)\right|^2$ che, al variare di $\mathbf{z}$, è una funzione continua sulla sfera unitaria in $\mathbf{R}^n$, e quindi è dotata di massimo e minimo assoluto. Inoltre, se la matrice $\mathbf{U}$ ha rango n, i prodotti scalari $(\mathbf{z}/\|\mathbf{z}\|, \mathbf{u}_i)$ non possono essere tutti nulli per nessuna $\mathbf{z}$ e di conseguenza il minimo della funzione deve essere strettamente positivo.

Quest'ultima osservazione è importante, perché garantisce che il vettore $\mathbf{z}$ è univocamente determinato dai prodotti scalari $\{(\mathbf{z}, \mathbf{u}_i)\}$. Infatti $(\mathbf{z}_1, \mathbf{u}_i) = (\mathbf{z}_2, \mathbf{u}_i)\ \forall i$ implica $\sum|(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1, \mathbf{u}_i)|^2 = 0$, e di conseguenza $\|\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1\| = 0$, da cui $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2$.

In uno spazio di Hilbert H in dimensione infinita può al contrario accadere che, se si sceglie in modo arbitrario una sequenza $\{u_i\}$ completa (ossia tale che $(f, u_i) = 0\ \forall i \Rightarrow f = 0$), il rapporto $\sum|(f, u_i)|^2/\|f\|^2$ abbia estremo inferiore nullo o estremo superiore infinito.

Ha quindi interesse prendere in considerazione quelle particolari sequenze $\{u_i\}$ tali che $A\|f\|^2 \le \sum|(f, u_i)|^2 \le B\|f\|^2$ per opportune costanti A,B. Una sequenza che verifica questa proprietà è detta *frame*.

Le sequenze $\{a_i\}$ tali che $\sum|a_i|^2 < \infty$ costituiscono uno spazio lineare, detto ℓ^2, che ha struttura hilbertiana con prodotto scalare $\langle\{a_i\}, \{b_i\}\rangle = \sum a_i b_i$. Se $\{u_i\}$ è un frame, l'operatore lineare $U : H \to \ell^2$ definito da $Uf = \{(f, u_i)\}$ è limitato e iniettivo con inversa continua. U^{-1}, tuttavia, non è in generale definito su tutto ℓ^2. Infatti, se gli u_i sono linearmente dipendenti, $\exists\{c_n\} \in \ell^2$ tale che $\sum c_n u_n = 0$ e quindi $\sum c_n(f, u_n) = 0\ \forall f \in H$, ossia $\{c_n\}$ è ortogonale all'immagine di U in ℓ^2. U^{-1} può essere esteso in modo arbitrario al sottospazio ortogonale all'immagine di U, $\mathrm{Im}(U)^\perp$; in particolare si definisce *pseudo-inverso*, $\tilde{U}^{-1} : \ell^2 \to H$ quell'estensione di U^{-1} che è nulla su $\mathrm{Im}(U)^\perp$.

Per trovare un'espressione esplicita di $\tilde{U}^{-1}$ in termini di U, si introduce ora l'*operatore aggiunto* $U^* : \ell^2 \to H : (f, U^*x) = \langle Uf, x\rangle\ \forall f \in H$. Esso è ben definito: infatti $f \mapsto \langle Uf, x\rangle$ è un funzionale continuo:

$$|\langle Uf, x\rangle| = \left|\sum(f, u_i)x_i\right| \le \left(\sum|(f, u_i)|^2\right)^{1/2}\|x\| \le \sqrt{B}\|f\|\|x\|,$$

e quindi, per il teorema di Riesz, $\exists y \in H : \langle Uf, x\rangle = (f, y)$. Inoltre y dipende linearmente da x e, per di più, $\|y\| = \sup_{\|f\|=1}|(f, y)| = \sup_{\|f\|=1}|\langle Uf, x\rangle| \le \sqrt{B}\|x\|$.

L'operatore U^*U è invertibile, dato che $U^*Uf = 0 \Rightarrow 0 = (U^*Uf, f) = \|Uf\|^2 \ge A\|f\|^2 \Rightarrow f = 0$.

Si ha $\widetilde{U}^{-1} = (U^*U)^{-1}U^*$: infatti, se $x = Uf$, $(U^*U)^{-1}U^*x = (U^*U)^{-1}U^*Uf = f$; se $x \in \mathrm{Im}(U)^{\perp}$, $U^*x = 0 \Rightarrow (U^*U)^{-1}U^*x = 0$.
Si pone ora $\tilde{u}_n = (U^*U)^{-1}u_n$. Allora $(f, U^*x) = \langle Uf, x\rangle = \sum (f, u_n)x_n \quad \forall f \in H \Rightarrow U^*x = \sum x_n u_n$, e $f = (U^*U)^{-1}U^*Uf = (U^*U)^{-1}\sum (f, u_n)u_n = \sum (f, u_n)\tilde{u}_n$. D'altra parte, poiché $(g, f) = \sum (f, u_n)(g, \tilde{u}_n)$, segue che $g = \sum (g, \tilde{u}_n)u_n$. $\{\tilde{u}_n\}$ è detto *frame duale*.
Si può provare che è verificata la relazione $\frac{1}{B}\|f\|^2 \le \sum |(f, \tilde{u}_i)|^2 \le \frac{1}{A}\|f\|^2$.
Infine, se gli u_n sono linearmente indipendenti, da $u_k = \sum_n (u_k, \tilde{u}_n)u_n$ si ricava $(u_k, \tilde{u}_n) = \delta_{kn}$.
In conclusione, si sono trovate due espressioni che generalizzano, per i frame negli spazi di Hilbert, gli sviluppi rispetto a basi biortogonali in dimensione finita. Naturalmente, dal punto di vista del calcolo, è necessario individuare una procedura per la determinazione esplicita di $(U^*U)^{-1}$.
Questi risultati possono essere applicati nel contesto delle trasformate di Fourier a finestre o delle wavelets in $L^2(\mathbf{R})$. Si è visto che queste trasformate sono espresse in forma integrale, utilizzando funzioni "di base" dipendenti da parametri che variano nel continuo: $F_\alpha = (f, u_\alpha)$. Si noti che il termine "base" non è qui usato nello stesso senso in cui è stato introdotto per gli spazi di Hilbert, sta semplicemente a indicare gli ingredienti fondamentali usati per la costruzione. Nella sintesi f viene ricostruita a partire dai "coefficienti" F_α utilizzando ancora un'espressione integrale: $f = (F_\alpha, v_\alpha)$.
Se però è possibile estrarre da $\{u_\alpha\}$ un frame $\{u_i\}$, allora l'operazione di sintesi può essere discretizzata: $f = \sum F_i w_i$, dove $F_i = (f, u_i)$. Gli elementi u_i non costituiscono necessariamente una base dello spazio di Hilbert, possono anche essere linearmente dipendenti, ma si ha corrispondenza biunivoca e continua fra f e la sequenza $\{F_i\} \in \ell^2$. In effetti, sia nel caso delle trasformate di Fourier a finestre sia in quello delle wavelets sono stati trovati, con procedure piuttosto laboriose, risultati riguardo all'estrazione di frame.
Nel caso delle wavelets è stata elaborata una procedura di discretizzazione seguendo una strada del tutto diversa, che sarà illustrata nel seguito.

Multirisoluzione

La teoria generale delle wavelets è molto complessa e articolata; numerose soluzioni sono state elaborate per affrontare problemi applicativi di diverso tipo, e sono contenute in diversi pacchetti software.
Nel seguito viene esaminato un particolare tipo di percorso, che porta alla costruzione di una famiglia di wavelets ortonormali, corrispondenti a traslazioni e a cambiamenti di scala discretizzati.

Wavelets di Haar

Sia $\varphi_0(t)$ la funzione caratteristica dell'intervallo $[0,1[$ e $\varphi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\varphi_0\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right)$, $j,k \in \mathbf{Z}$ (dette *funzioni di scala*). Per j fissato, $\{\varphi_{j,k} \mid k \in \mathbf{Z}\}$ costituisce una famiglia ortonormale in $L^2(\mathbf{R})$, che genera un sottospazio vettoriale $V_j \subset L^2(\mathbf{R})$. Si verifica che $V_{j+1} \subset V_j$, $\bigcap V_j = \{0\}$, $\overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbf{R})$ (ossia, l'unione dei V_j è densa in $L^2(\mathbf{R})$).
E' interessante esaminare il complemento ortogonale W_{j+1} (*spazio delle wavelets a livello di risoluzione* $j+1$) di V_{j+1} in V_j : $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$.
A tale scopo, si consideri la decomposizione

$\varphi_{j,2k}(t)=\frac{1}{2}\left(\varphi_{j,2k}(t)+\varphi_{j,2k+1}(t)\right)+\frac{1}{2}\left(\varphi_{j,2k}(t)-\varphi_{j,2k+1}(t)\right)$. Il primo addendo è $\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{j+1,k}$, mentre il secondo si può scrivere come $\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{j+1,k}$, dove $\psi_{j+1,k}$ sono funzioni normalizzate in $L^2(\mathbf{R})$, ortogonali fra loro e anche ortogonali a tutte le $\varphi_{j+1,h}$. Analogamente, $\varphi_{j,2k+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{j+1,k}-\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{j+1,k}$.
Di conseguenza, ogni funzione di V_j si può scrivere in modo univoco come somma di una funzione di V_{j+1} e di una combinazione lineare delle $\psi_{j+1,k}$. Quindi le $\psi_{j+1,k}$ generano W_{j+1} , e pertanto costituiscono una base di wavelets a livello di risoluzione j+1.
In sostanza, le funzioni di V_j , che sono costanti a tratti in intervalli di ampiezza 2^j , ossia hanno "risoluzione" 2^j , si scrivono come somma di funzioni di V_{j+1} , che hanno "risoluzione" 2^{j+1} , quindi più grossolana, con funzioni di W_{j+1} , che rappresentano i "dettagli" necessari per raffinare la risoluzione.
Data $f\in L^2(\mathbf{R})$, la funzione $\sum_k (f,\varphi_{j,k})\varphi_{j,k}$ è la proiezione ortogonale di f in V_j ; facendo tendere j a $-\infty$ si proietta in spazi sempre più grandi, aggiungendo dettagli che raffinano sempre più la risoluzione.
L'analisi di $f\in L^2(\mathbf{R})$ basata su una struttura di spazi così organizzati è detta *analisi multirisoluzione.*

NOTA: è importante osservare, in vista di quel che segue, che

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{0,k}(t)dt\equiv\hat{\varphi}_{0,k}(0)=1\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty}\psi_{j,k}(t)dt\equiv\hat{\psi}_{j,k}(0)=0\ .$$

Generalizzazioni

Le wavelets di Haar (introdotte all'inizio del '900) consentono di analizzare una funzione localmente (dato che sono a supporto compatto) in termini della risoluzione: è possibile differenziale localmente la scelta della risoluzione, adottando una risoluzione più raffinata dove le variazioni della funzione sono più rapide. Esse realizzano quindi qualcosa di simile a quanto ottenuto con le funzioni $\psi_{s,t}$ precedentemente introdotte, con la differenza che, mentre i parametri s , t variano nel continuo, i parametri j , k delle wavelets di Haar sono discreti, e le funzioni $\psi_{j,k}$ costituiscono nel loro complesso una base ortonormale in $L^2(\mathbf{R})$.

Si tratta ora di vedere se e come sia possibile generalizzare questo risultato ad altre famiglie di funzioni con proprietà di regolarità più forti. Come si vedrà, si tratta di un obiettivo tutt'altro che semplice.

In concreto, si vuole introdurre una *funzione di scala madre* $\varphi_0(t)\in L^2(\mathbf{R})$ tale che, definite le $\varphi_{j,k}(t)=2^{-j/2}\varphi_0\left(\frac{t-2^j k}{2^j}\right)$, $j,k\in\mathbf{Z}$ e gli spazi V_j da esse generati, risulti, come per le wavelets di Haar, $V_{j+1}\subset V_j$, $\bigcap V_j=\{0\}$, $\overline{\bigcup V_j}=L^2(\mathbf{R})$. Inoltre si richiede che le $\varphi_{j,k}$ per j fissato siano mutuamente ortogonali e normalizzate in $L^2(\mathbf{R})$; si vuole poi introdurre una base ortonormale $\{\psi_{j,k}\}$ nel complemento ortogonale W_j di V_j in V_{j-1} . Si tratta di vedere quali condizioni debbano essere soddisfatte affinché si possa realizzare tale situazione.

In primo luogo

$$V_{j+1} \subset V_j \;\Rightarrow\; \varphi_{j+1,h}(t) = \sum_k h_k \varphi_{j,k}(t) \tag{1a}$$

$$W_{j+1} \subset V_j \;\Rightarrow\; \psi_{j+1,h}(t) = \sum_k g_k \varphi_{j,k}(t) \tag{1b}$$

La (1a) implica in particolare

$\varphi_0(t) \equiv \varphi_{0,0}(t) = \sqrt{2}\sum_{-\infty}^{\infty} h_k \varphi_0(2t-k)$.

Passando alla trasformata di Fourier si ottiene

$$\hat{\varphi}(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k h_k e^{-i2\pi k\frac{\nu}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\nu}{2}\right) \equiv H\left(\frac{\nu}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\nu}{2}\right) \tag{2}$$

Si noti che $H(\nu) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k h_k e^{-i2\pi k\nu}$ è periodica di periodo 1.

Dalla (2) segue immediatamente che, se $\hat{\varphi}(0) \neq 0$, allora $H(0) = 1$.

Si introduce ora la condizione di ortonormalità. In particolare $\left(\varphi_{0,0}, \varphi_{0,k}\right) = \delta_{0k}$. Passando alle trasformate di Fourier ed applicando l'identità di Parseval si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\,\hat{\varphi}(\nu)\,|^2\, e^{i2\pi k\nu} d\nu = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\int_0^1 |\,\hat{\varphi}(\nu+\ell)\,|^2\, e^{i2\pi k\nu} d\nu = \delta_{0k} \;,$$

da cui segue
$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\,\hat{\varphi}(\nu+\ell)\,|^2 = 1. \tag{3}$$

D'altra parte $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\,\hat{\varphi}(\nu+\ell)\,|^2 = \sum \left| H\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\ell}{2}\right)\right|^2 \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\ell}{2}\right)\right|^2$. Separando nella sommatoria gli indici pari da quelli dispari e tenendo conto della periodicità di H si ottiene:

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\,\hat{\varphi}(\nu+\ell)\,|^2 = \left|H\left(\frac{\nu}{2}\right)\right|^2 \sum_j \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\nu}{2}+j\right)\right|^2 + \left|H\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)\right|^2 \sum_j \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}+j\right)\right|^2 \;,$$

da cui, tenendo conto della (3), si ricava

$$\left|H(\nu)\right|^2 + \left|H(\nu+\tfrac{1}{2})\right|^2 = 1 \tag{4}$$

In particolare, essendo, come già visto, $H(0) = 1$, ne segue $H\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0$.

Ora, sia ℓ un intero non nullo. Si può scrivere in sequenza

$$\hat{\varphi}(\ell) = H\left(\frac{\ell}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\ell}{2}\right) = H\left(\frac{\ell}{2}\right)H\left(\frac{\ell}{4}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\ell}{4}\right) = \cdots \;,$$

e, dopo un numero finito di passaggi, si ottiene un argomento di H semi-intero. Di conseguenza, $\hat{\varphi}(\ell)=0$, $\ell \neq 0$ intero , e, per la (3), $\hat{\varphi}(0)=1$.

Ricapitolando, se si impone $V_{j+1} \subset V_j$, $\left(\varphi_{0,0}, \varphi_{0,k}\right)=\delta_{0k}$ e $\hat{\varphi}(0) \neq 0$, ne consegue che devono essere necessariamente verificate $\hat{\varphi}(\ell)=0$, $\ell \neq 0$ intero , $\hat{\varphi}(0)=1$ e le condizioni su H conseguenti alla (4).

Per introdurre una base di wavelets, si definisce

$$\hat{\psi}(\nu)=e^{i2\pi\frac{\nu}{2}}\overline{H(\tfrac{\nu}{2}+\tfrac{1}{2})}\hat{\varphi}(\tfrac{\nu}{2})=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sum(-1)^k\,\overline{h_k}\,e^{i2\pi\frac{\nu}{2}(k+1)}\hat{\varphi}(\tfrac{\nu}{2}) \qquad (5)$$

da cui, passando all'antitrasformata,

$$\psi_0(t)=\sqrt{2}\sum(-1)^k\,\overline{h_k}\,\varphi(2t+k+1)=\sqrt{2}\sum(-1)^{k+1}\,\overline{h_{-k-1}}\,\varphi_0(2t-k) \qquad (6).$$

Da $\psi_0(t) \equiv \psi_{0,0}(t)$ vengono poi generate per traslazioni e cambiamenti di scala le $\psi_{j,k}(t)$.
Naturalmente bisogna provare che le funzioni così costruite hanno le proprietà richieste, ossia che le $\psi_{j,k}$ per j fissato sono una base ortonormale per lo spazio W_j tale che $W_j \oplus V_j = V_{j-1}$. Essenzialmente, bisogna verificare che $\left(\psi_{j,k}, \varphi_{j,\ell}\right)=0$, $\left(\psi_{j,k}, \psi_{j,\ell}\right)=\delta_{k\ell}$, cosa che può essere fatta semplicemente con calcoli analoghi a quelli che hanno portato alla (3) e alla (4).

ESEMPIO: per la funzione di scala di Haar, essendo $\varphi_0(t)=\varphi_0(2t)+\varphi_0(2t-1)$, si ricava, usando la (1a),

$$h_0=h_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ h_i=0 \text{ per } i \neq 0,1 \text{ , da cui } H(\nu) \equiv \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sum h_k e^{-i2\pi k\nu}=\tfrac{1}{2}(1+e^{-i2\pi\nu}) \ .$$

Inoltre, $\hat{\varphi}(\nu)=\dfrac{1-e^{-i2\pi\nu}}{i2\pi\nu}$.

Esaminiamo ora le implicazioni delle 2 condizioni $\bigcap V_j=\{0\}$, $\overline{\bigcup V_j}=L^2(\mathbf{R})$.
La prima è certamente soddisfatta se

$$\sup|f(t)| \leq c\|f\|_{L^2(\mathbf{R})} \quad \forall f \in V_0 \qquad (7).$$

Infatti, in tal caso, se $g \in V_j$, posto $f(t)=g(2^j t)$, si ha che $f \in V_0$, e $\sup|g|=\sup|f| \leq c\|f\|=c \cdot 2^{-j/2}\|g\|$. Quindi, se $g \in V_j$ $\forall j$, allora necessariamente $\sup|g|=0$.
La condizione (7) è certamente verificata se $\sum\limits_k\left|\varphi_0(t-k)\right|^2<c^2$, il che è certamente vero se la funzione φ_0 è limitata e a supporto compatto, dato che, in tal caso, il numero di addendi non nulli non supera un certo numero finito indipendentemente da t .

Infatti $\left|f(t)\right| \leq \sum\limits_k |f_k|\left|\varphi_0(t-k)\right| \leq \left(\sum\limits_k |f_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum\limits_k\left|\varphi_0(t-k)\right|^2\right)^{1/2}<c\|f\|$.

Quanto alla seconda condizione, $\overline{\bigcup V_j}=L^2(\mathbf{R})$ (*completezza*), poiché gli spazi V_j diventano sempre più grandi per $j \to -\infty$, essa è equivalente ad affermare che $\lim\limits_{j\to-\infty} P_j f=f$, dove P_j è l'operatore di proiezione su V_j : $P_j f=\sum\limits_k (f,\varphi_{j,k})\varphi_{j,k}$.

Si consideri il caso che φ_0 sia a supporto limitato, per esempio contenuto in $[0, M]$, e si esamini, come esempio particolare, la funzione caratteristica dell'intervallo $[0,1[$: $f = \chi_{[0,1[}$. Evidentemente l'esame di questo caso potrà dare luogo alla determinazione di condizioni necessarie.
Con questa scelta di f si ottiene:

$$(f, \varphi_{j,k}) = \int_0^1 \varphi_{j,k}(t)dt = 2^{-j/2} \int_0^1 \varphi_0\left(\frac{t-2^j k}{2^j}\right)dt = 2^{-j/2} 2^j \int_{-k}^{2^{-j}-k} \varphi_0(\tau)d\tau \equiv c_k \qquad (8).$$

Posto ora $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t)dt = q$, $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_0(t)|dt = C$, si esamina più dettagliatamente la (8); dato che si vuole studiare il limite per $j \to -\infty$, ci si può limitare a considerare valori di j negativi e grandi in valore assoluto, tali che $2^{-j} > M$.
Per $k = 0, \cdots, 2^{-j} - M$ l'intervallo di integrazione contiene il supporto di φ_0, e di conseguenza $c_k = 2^{j/2} q$. Quindi, per questi valori di k, $\sum |c_k|^2 = (2^{-j} - M + 1)2^j q^2 = \left(1 - 2^j (M-1)\right)q^2$, che, per $j \to -\infty$, tende a q^2 .
Per $k = -M+1, \cdots, -1$ e per $k = 2^{-j} - M + 1, \cdots, 2^{-j} - 1$ l'intervallo di integrazione contiene parzialmente il supporto di φ_0 , e si può scrivere $|c_k| \le 2^{j/2} \int_0^{2^{-j}} |\varphi_0(t)|\, dt = 2^{j/2} C$; quindi per questi indici $\sum |c_k|^2 \le 2^j C^2 \cdot 2(M-1)$, che tende a 0 per $j \to -\infty$.
Per tutti gli altri indici k il supporto di φ_0 è disgiunto dall'intervallo di integrazione, e quindi $c_k = 0$. Di conseguenza, sommando su tutti gli indici k, si ottiene

$$\lim_{j\to-\infty} \|P_j f\|^2 = \lim_{j\to-\infty} \sum_k |c_k|^2 = q^2 .$$

D'altra parte, poiché $\|f\| = 1$, se si vuole che $\lim_{j\to-\infty} P_j f = f$, deve essere $|q| = 1$, in accordo con quanto già ottenuto a seguito della (4), che però richiedeva di assumere $q \neq 0$, mentre qui non è necessario fare questa ipotesi.
Sulla completezza ci si limita qui a queste considerazioni, ma è possibile provare che la condizione q=1 è anche sufficiente per la completezza.

Costruzione di basi per una struttura multirisoluzione

Si è già visto che, per la funzione di scala di Haar φ_0, si ha $H(\nu) = \frac{1}{2}(1 + e^{-i2\pi\nu})$, $\hat{\varphi}(\nu) = \dfrac{1 - e^{-i2\pi\nu}}{i2\pi\nu}$.

Per convoluzioni successive si costruisce ora la sequenza

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{(1)}(t) = (\varphi_0 * \varphi_0)(t) & & \hat{\varphi}^{(1)}(\nu) = \hat{\varphi}(\nu)^2 \\ \cdots & \Rightarrow & \cdots \\ \varphi^{(n)}(t) = \left(\varphi_0 * \varphi^{(n-1)}\right)(t) & & \hat{\varphi}^{(n)}(\nu) = \hat{\varphi}(\nu)^{n+1} \end{array} \qquad (9)$$

Dalla (2) si ottiene immediatamente, usando la (9), $\hat{\varphi}^{(n)}(\nu) = \left(H\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)^{n+1} \hat{\varphi}^{(n)}\left(\frac{\nu}{2}\right)$, ossia la (2) è verificata anche per $\hat{\varphi}^{(n)}$, con $H^{(n)}(\nu) = H^{n+1}(\nu) = \left[\tfrac{1}{2}(1+e^{-i2\pi\nu})\right]^{n+1} = \sum_k \frac{1}{2^{n+1}}\binom{n+1}{k} e^{-i2\pi k\nu}$.

Quest'ultima espressione fornisce direttamente i coefficienti $h_k^{(n)}$ della formula (1a).

Di conseguenza, se si utilizza $\varphi^{(n)}$ come funzione di scala madre per la costruzione di spazi V_j , la condizione $V_{j+1} \subset V_j$ è verificata. La condizione $\bigcap V_j = \{0\}$ segue dal fatto che $\varphi^{(n)}$ è limitata a supporto compatto. Inoltre è ovviamente verificata la condizione $\hat{\varphi}^{(n)}(0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(n)}(t)dt = 1$ che è condizione sufficiente di completezza: $\overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbf{R})$.

Non è invece in generale verificata la condizione di ortonormalità $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}^{(n)}(\nu+\ell)|^2 = 1$.

E' però facile verificare che $0 < A \le \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}^{(n)}(\nu+\ell)|^2 = \sum \left| \frac{1-e^{-i2\pi(\nu+\ell)}}{i2\pi(\nu+\ell)} \right|^{2(n+1)} \le B$. Infatti, da un lato, ciascun addendo può essere maggiorato, uniformemente rispetto a ν, da un numero che, per $|\ell| \to \infty$, tende a 0 come ℓ^{-2} , dall'altro, si vede che, per $-\frac{1}{2} \le \nu \le \frac{1}{2}$, la funzione $\hat{\varphi}(\nu)$ si mantiene più grande di una costante strettamente positiva, e, d'altra parte, $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\nu+\ell)|^2$ è periodica di periodo 1, e quindi è sufficiente studiarla in un intervallo di ampiezza 1.

Si considerano ora le funzioni $\tilde{\varphi}^{(n)}(t)$ definite da $\hat{\tilde{\varphi}}^{(n)}(\nu) = \frac{\hat{\varphi}^{(n)}(\nu)}{\left(\sum |\hat{\varphi}^{(n)}(\nu+\ell)|^2\right)^{1/2}}$, che certamente verificano $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\hat{\tilde{\varphi}}^{(n)}(\nu+\ell)|^2 = 1$.

Il punto cruciale è che gli spazi V_j generati dalle $\varphi_{j,k}^{(n)}(t)$ coincidono con quelli generati dalle $\tilde{\varphi}_{j,k}^{(n)}(t)$ ottenute dalla funzione madre $\tilde{\varphi}^{(n)}(t)$ antitrasformata di Fourier di $\hat{\tilde{\varphi}}^{(n)}(\nu)$. Per verificarlo, si osservi che, posto

$$\left(\sum |\hat{\varphi}^{(n)}(\nu+\ell)|^2\right)^{-1/2} = \sum a_k e^{-i2\pi k\nu} \ , \ \left(\sum |\hat{\varphi}^{(n)}(\nu+\ell)|^2\right)^{1/2} = \sum b_k e^{-i2\pi k\nu}$$

(entrambe le funzioni sono continue, limitate e periodiche di periodo 1, quindi sviluppabili in serie di Fourier), si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{\varphi}}^{(n)}(\nu) &= \sum a_k e^{-i2\pi k\nu} \hat{\varphi}^{(n)}(\nu) \Rightarrow \tilde{\varphi}^{(n)}(t) = \sum a_k \varphi^{(n)}(t-k) \\ \hat{\varphi}^{(n)}(\nu) &= \sum b_k e^{-i2\pi k\nu} \hat{\tilde{\varphi}}^{(n)}(\nu) \Rightarrow \varphi^{(n)}(t) = \sum b_k \tilde{\varphi}^{(n)}(t-k) \end{aligned} .$$

Quindi deve essere verificata una relazione del tipo

$$\hat{\tilde{\varphi}}^{(n)}(\nu) = \tilde{H}^{(n)}\left(\tfrac{\nu}{2}\right)\hat{\tilde{\varphi}}^{(n)}\left(\tfrac{\nu}{2}\right) \quad \left(\text{con } \tilde{H}^{(n)}(\nu) = H^{(n)}(\nu)\frac{\left(\sum |\hat{\varphi}^{(n)}(\nu+\ell)|^2\right)^{1/2}}{\left(\sum |\hat{\varphi}^{(n)}(2\nu+\ell)|^2\right)^{1/2}}\right) \qquad (10) \ ;$$

inoltre, essendo $\hat{\varphi}^{(n)}(0) \neq 0$, deve essere anche $\hat{\hat{\varphi}}^{(n)}(0) \neq 0$. Di conseguenza, si può utilizzare lo stesso percorso seguito in precedenza per arrivare a concludere che deve essere $\hat{\hat{\varphi}}^{(n)}(0) = 1$, condizione di completezza.

Quindi, partendo dalla funzione di scala di Haar, si è generata per convoluzione, e con le manipolazioni sopra illustrate, una sequenza di funzioni di scala, che poi vengono utilizzate per costruire spazi di wavelets multirisoluzione generati da basi ortonormali definite da formule analoghe alla (5) e alla (6).

Per esaminare più in dettaglio il comportamento delle wavelets $\tilde{\psi}^{(n)}_{j,k}$, si osservi che, per la (5), $\hat{\tilde{\psi}}^{(n)}(0) = \overline{\tilde{H}^{(n)}(\tfrac{1}{2})}\hat{\tilde{\varphi}}^{(n)}(0)$, e che, per la (10), $\tilde{H}^{(n)}$ è infinitesima dello stesso ordine di $H^{(n)} \equiv H^{n+1}$, ossia di ordine n+1 , per $\nu \to \frac{1}{2}$. Di conseguenza, $\hat{\tilde{\psi}}^{(n)}$ è nullo per $\nu = 0$ con le sue derivate fino all'ordine n , e quindi $\int_{-\infty}^{\infty} t^k \tilde{\psi}^{(n)}(t)dt = 0$ per $k = 0,\cdots,n$. Si dice che una wavelet ψ che gode di questa proprietà, e tale che inoltre $\int_{-\infty}^{\infty} t^{n+1}\psi(t)dt \neq 0$, è *di ordine* n+1.

L'importanza dell'ordine di una wavelet nasce dal fatto che ad esso è legata la rapidità di decadimento dei coefficienti $\tilde{f}(j,k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi_{j.k}(t)}dt$ quando $j \to -\infty$ (ossia quando la risoluzione diventa sempre più fine, il che è l'analogo del caso in cui la frequenza tende ad infinito per la trasformata di Fourier).

Più precisamente, vale il seguente risultato: se la wavelet è di ordine N ed ha supporto limitato, e la funzione f è continua con le sue derivate fino all'ordine r , $r<N$ in un intorno di un punto $\bar{t}$, e inoltre la sua derivata di ordine r , $f^{(r)}$, è tale che, in un intorno di $\bar{t}$ il rapporto $(f^{(r)}(t_2) - f^{(r)}(t_1))/(t_2 - t_1)$ si mantiene limitato (*condizione di Lipschitz*), allora il coefficiente $\tilde{f}(j,k)$ è infinitesimo di ordine $2^{j(r+3/2)}$ per $j \to -\infty$.

Senza dare una dimostrazione completa, per dare un'idea del ruolo dell'ordine della wavelet, basta pensare che, ponendo per semplicità $\bar{t} = 0$, $f(t) = \sum_0^r \frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k + R$, e quindi

$$\tilde{f}(j,0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi_{j.0}(t)}dt = \sum_0^r \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} t^k\, \overline{\psi_{j.0}(t)}dt + A \ .$$

Se la wavelet è di ordine $N>r$, la sommatoria è nulla, e l'ordine di infinitesimo di A dipende dall'ordine di infinitesimo del resto di Taylor e dal fatto che l'ampiezza dell'intervallo di integrazione dipende dal supporto di $\psi_{j,0}$, la cui ampiezza è di ordine 2^j .

ESEMPIO: Usando la wavelet di Haar, che è di ordine 1 , si verifica che l'ordine di infinitesimo dei coefficienti della funzione $f(t) = \begin{cases} t & \text{per } 0 \le t < 1/3 \\ t-1 & \text{per } 1/3 \le t \le 1 \end{cases}$ è diverso a seconda che t=1/3 appartenga o no al supporto di $\psi_{j,k}$.

In questo caso $\psi_{j,k} = 2^{-j/2}\left(\chi_{]2^j\ell,2^j(\ell+1/2)]} - \chi_{]2^j(\ell+1/2),2^j(\ell+1)]}\right)$.

Se 1/3 non appartiene a $]2^j\ell, 2^j(\ell+1)]$, $f(t)$ è continua nell'intervallo, e si può scrivere

$$\int f(t)\overline{\psi_{j,k}(t)}dt = \int (f(t)-f(t_0))\overline{\psi_{j,k}(t)}dt + f(t_0)\int \overline{\psi_{j,k}(t)}dt = \int (t-t_0)\overline{\psi_{j,k}(t)}dt$$

(dove $t_0 = 2^j(\ell + 1/2)$), dato che $\int \overline{\psi_{j,k}(t)}dt = 0$. E' facile verificare con il calcolo diretto che l'integrale ha ordine di infinitesimo $2^{-j/2}\cdot 2^{2j} = 2^{(3/2)j}$.
Se invece il supporto di $\psi_{j,k}$ contiene il punto di discontinuità 1/3, l'integrale ha ordine di infinitesimo $2^{-j/2}\cdot 2^{j} = 2^{j/2}$.

NOTA: Il procedimento che porta a costruire per successive convoluzioni, partendo dalla wavelet di Haar, wavelets di ordine sempre più elevato dà luogo a funzioni di cui non è nota l'espressione analitica esplicita (*wavelets di Daubechies)*; la possibilità di usarle in pratica è quindi legata soprattutto alla costruzione di un software per l'analisi e la sintesi con metodi numerici appropriati.