Trattamento dati GPS

Il trattamento dei dati di una sessione GPS è in generale un'operazione notevolmente complessa in cui i dati acquisiti da uno o più ricevitori lungo l'intera durata della sessione vengono elaborati simultaneamente per cancellare o ridurre quanto possibile gli errori dei diversi tipi e determinare le ambiguità del numero intero di cicli nelle misure di differenza di fase della portante come numeri interi, in modo da rendere minime le incertezze nelle coordinate dei punti o nelle componenti delle baseline. Basta ricordare che la determinazione delle 3 coordinate spaziali di una stazione ricevente e la stima dell'errore di orologio del ricevitore rispetto alla scala dei tempi del sistema GPS richiede l'osservazione simultanea di almeno 4 satelliti, che la determinazione del numero intero di cicli per la fase del segnale di ciascun satellite richiede l'acquisizione di un certo numero di epoche senza interruzione del collegamento fra il ricevitore e il satellite, che la cancellazione o la riduzione di un certo numero di errori sistematici richiede il trattamento di osservazioni differenziate e la stima di baseline anziché di posizioni puntuali, che la modellizzazione dell'errore dovuto all'attraversamento della ionosfera richiede l'uso di 2 portanti con frequenza diversa, ecc.

Non è quindi possibile fornire in breve una descrizione esauriente dell'insieme delle operazioni eseguite e delle possibili strategie adottate. Perciò ci si limita ad una sommaria descrizione di alcune operazioni elementari, che non pretende di fornire un quadro realistico delle elaborazioni eseguite, ma mette in evidenza alcune relazioni esistenti fra le diverse osservabili e le quantità da stimare, illustrando nel contempo i limiti di impostazioni troppo semplicistiche del trattamento dei dati.

Si considerino ad esempio le osservazioni di pseudo-range e di fase di un ricevitore a doppia frequenza ad una singola epoca, relative ad un singolo satellite. Esse sono 4, ossia un'osservazione di pseudo-range e 1 di fase per ciascuna delle 2 portanti: P_1, P_2, ϕ_1, ϕ_2 . Una semplice relazione lineare lega queste osservabili a 4 grandezze da cui esse dipendono, ossia la distanza ρ fra il ricevitore e il satellite, la correzione ionosferica (è noto che le correzioni ionosferiche sulle distanze sono inversamente proporzionali al quadrato della frequenza della portante, per cui, se I_0 è la correzione relativa alla frequenza f_1 , quella relativa alla frequenza f_2 è $(f_1^2 / f_2^2) I_0$), e le 2 ambiguità iniziali del numero intero di cicli N_1 e N_2 :

$$P_1 = \rho + I_0 + e_1^{(P)}$$

$$P_2 = \rho + (f_1^2 / f_2^2) I_0 + e_2^{(P)}$$

$$\lambda_1 \phi_1 = \rho - I_0 + \lambda_1 N_1 + e_1^{\phi}$$

$$\lambda_2 \phi_2 = \rho - (f_1^2 / f_2^2) I_0 + \lambda_2 N_2 + e_2^{\phi}$$

dove $\lambda_1 \cong 19\text{cm}$, $\lambda_2 \cong 24\text{cm}$ sono le lunghezze d'onda delle 2 portanti, gli $e_i^{(\cdot)}$ sono residui dovuti a varie cause (errori di orologio, errore troposferico, ecc.), che possono anche essere molto grandi, ma che non sono modellizzabili in questo schema.
(E' noto dalla teoria della propagazione delle onde elettromagnetiche che gli effetti ionosferici sulle misure di pseudo-range e di fase hanno segno opposto).
Trascurando i residui non modellizzati, si scrive un sistema lineare omogeneo la cui forma matriciale è

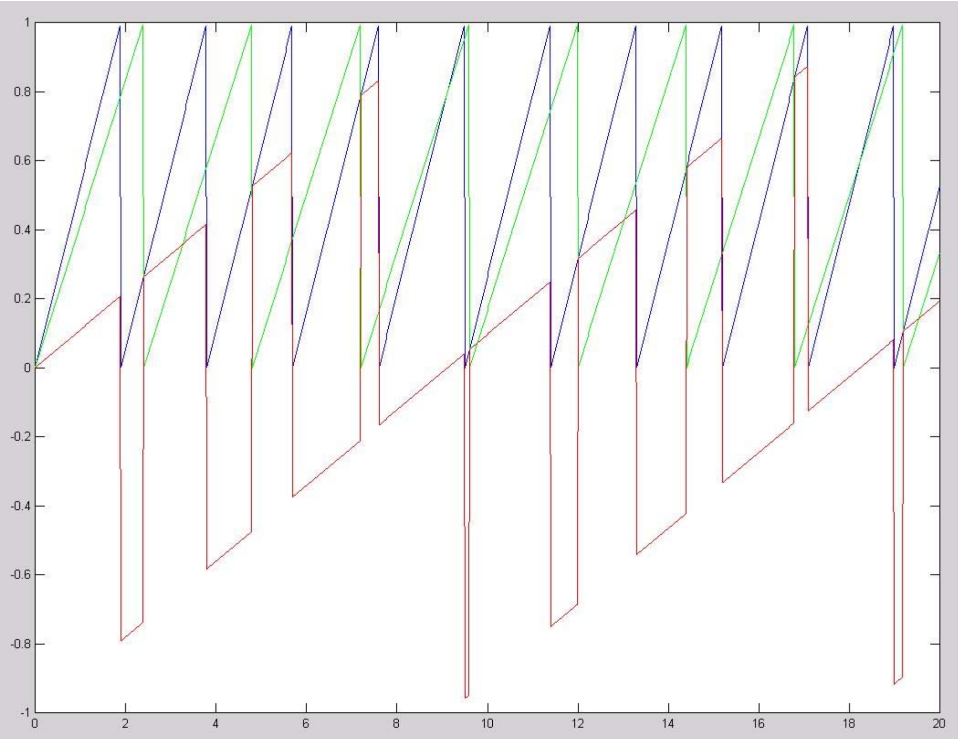
$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \lambda_1 \phi_1 \\ \lambda_2 \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & f_1^2 / f_2^2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda_1 & 0 \\ 1 & -f_1^2 / f_2^2 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ I_0 \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$$

e che può essere risolto, dato che la matrice A del sistema è invertibile. Quello che interessa però non è tanto la soluzione in sé di questo sistema, che è ovviamente affetta da errori molto grandi, a

causa del termine non omogeneo trascurato, quanto il fatto che, a causa della propagazione degli errori, i valori N_i non potrebbero in ogni caso essere determinati come numeri interi con un errore inferiore all'unità. Infatti, si ricordi che la matrice di covarianza C delle quantità da determinare è data dall'espressione $C = A^{-1}C_{P\phi}(A^{-1})^T$, dove $C_{P\phi}$ è la matrice di covarianza delle osservabili, e che gli sqm sono le radici quadrate degli elementi diagonali delle matrici di covarianza. Allora, ponendo i valori di 30cm come sqm degli pseudo-range e di 2mm come sqm delle fasi, e ponendo per il rapporto f_1 / f_2 il valore standard 154/120 , si ottiene per gli sqm di N_1 e N_2 il valore di circa 8 . A pensarci bene, questo risultato è del tutto prevedibile: sarebbe infatti sorprendente che le misure di pseudo-range potessero fornire informazioni utili per la determinazione precisa del numero intero di cicli per lunghezze d'onda più piccole del loro sqm.
Tuttavia, basta riscrivere il sistema in una forma leggermente modificata:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \lambda_1\phi_1 \\ \lambda_2\phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & f_1^2 / f_2^2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \lambda_1 \\ 1 & -f_1^2 / f_2^2 & -\lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ I_0 \\ N_1 - N_2 \\ N_1 \end{pmatrix}$$

e si scopre che lo sqm di $N_W = N_1 - N_2$ ottenuto dalla propagazione degli errori risulta nettamente inferiore all'unità. La corrispondente frequenza $f_W = f_1 - f_2$ è detta *wide lane* (vedi fig.) e corrisponde ad una lunghezza d'onda di circa 86cm. Naturalmente questo risultato di per sé non dice nulla: è solo un piccolo tassello che ci suggerisce il possibile utilizzo della frequenza wide lane in una qualche procedura di calcolo.



blu: fase con periodo 1.9 ϕ_1
verde: fase con periodo 2.4 ϕ_2
rosso: differenza $\phi_1 - \phi_2$

NOTA – La forma in cui sono state scritte le equazioni di osservazione è quella che normalmente si trova in letteratura. Si osservi però che, se ϕ è l'osservabile di fase ($0 \le \phi < 1$ alla prima epoca di rilevamento o dopo un cycle-slip, mentre per le epoche successive ϕ contiene la variazione del numero intero di cicli rispetto alla prima epoca), la quantità direttamente connessa con la distanza ρ è $\lambda(\phi + N)$, dove N è il numero intero di cicli; sembra quindi che λN , passato al secondo membro dell'equazione di osservazione, debba essere preceduto dal segno meno. La questione è puramente convenzionale: dopo tutto, non è proibito che il valore di N risulti negativo.

Dalle equazioni di osservazione per le fasi, ricordando che $\lambda = c/f$, si verifica immediatamente che nella combinazione $f_1\phi_1 - f_2\phi_2$ la dipendenza da I_0 risulta cancellata. In realtà si utilizza una combinazione proporzionale a questa, ossia $\phi_{IF} = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2}\phi_1 - \frac{f_1 f_2}{f_1^2 - f_2^2}\phi_2$, detta *iono-free*, in cui i 2 coefficienti sono adimensionali (indipendenti dalle unità di misura), il primo circa uguale a 2.546 , il secondo a 1.984 . Anche questa quantità si rivela utile in alcune elaborazioni.

Nella combinazione $f_1\phi_2 - f_2\phi_1$, invece, scompare la dipendenza dalla distanza ρ . In particolare, può essere utilizzata l'espressione $\frac{f_1\phi_2 - f_2\phi_1}{f_1 - f_2} = N_1 - \frac{f_1}{f_1 - f_2} N_W + errori$. A causa della presenza degli errori, che sono in generale grandi, l'utilizzazione non può essere diretta, ma soltanto a seguito del calcolo delle differenze doppie, che abbattono gli errori sistematici. Allora è possibile da $\Delta\nabla N_W$, calcolato, come visto in precedenza, con piccolo errore di propagazione, ottenere una determinazione accurata di $\Delta\nabla N_1$, pur tenendo conto che il coefficiente $\frac{f_1}{f_1 - f_2} \cong 4.5$ amplifica l'errore. Si ricordi che sia $\Delta\nabla N_W$, sia $\Delta\nabla N_1$ devono assumere valori interi.

Nelle considerazioni precedenti si sono esaminate le osservabili ad una singola epoca. Nelle elaborazioni di dati relativi ad una sequenza di epoche, è possibile fare uso di diverse combinazioni delle osservabili, che consentono di trarre vantaggio sia degli errori casuali molto piccoli sulle misure di fase, sia del fatto che lo pseudo-range è indipendente dall'incognita del numero intero di cicli.

Ad esempio, partendo dal fatto che, prescindendo dagli errori, deve essere valida l'uguaglianza $P_{(i)} - P_{(i-1)} = (c/f)(\phi_{(i)} - \phi_{(i-1)})$ (purché non ci sia un cycle slip fra le epoche i e i-1), è possibile prendere in considerazione uno pseudo-range *estrapolato* $P_{(i)}^{(ex)} = P_{(i-1)} + (c/f)(\phi_{(i)} - \phi_{(i-1)})$, uno pseudo-range *lisciato* $\tilde{P}_{(i)} = wP_{(i)} + (1-w)P_{(i)}^{(ex)}$, dove $w, 0 < w < 1$ è un peso da scegliere caso per caso, oppure anche, dopo aver costruito per una certa epoca iniziale una sequenza di pseudo-range estrapolati da epoche successive: $P_{(0)}^{(i)} = P_{(i)} - (c/f)(\phi_{(i)} - \phi_{(0)})$, farne una media $\overline{P}_{(0)} = (1/n)\sum_1^n P_{(0)}^{(i)}$ e utilizzarla per costruire pseudo-range estrapolati relativi a epoche successive: $\hat{P}_{(i)} = \overline{P}_{(0)} + (c/f)(\phi_{(i)} - \phi_{(0)})$. Queste quantità possono essere utili come punti di partenza per la costruzione di algoritmi per il calcolo delle ambiguità del numero intero di cicli *on the fly* , ovvero mentre il ricevitore è in movimento. Va in ogni caso ricordato che per la determinazione on the fly delle ambiguità hanno grande importanza algoritmi sequenziali basati su informazioni cinematiche a priori, come il filtro di Kalman.

Per la determinazione dell'ambiguità del numero intero di cicli, in ultima analisi bisogna fare una stima con il metodo dei minimi quadrati, in cui intervengono altri parametri da stimare e vengono utilizzate le osservabili di un certo numero di epoche. Tuttavia il risultato per le ambiguità deve essere alla fine un numero intero, e quindi nella procedura di stima è bene tenere le ambiguità separate dagli altri parametri. Conviene quindi scrivere il sistema di equazioni di osservazione nella forma

$$\mathbf{y} = \mathbf{At} + \mathbf{BI} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} + \mathbf{b} \qquad (\ \mathbf{I} = \text{ambiguità}\ ,\ \mathbf{t} = \text{altri parametri})$$

che porta al sistema normale

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^\mathbf{T} \\ \mathbf{B}^\mathbf{T} \end{pmatrix} \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{t}} \\ \hat{\mathbf{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^\mathbf{T} \\ \mathbf{B}^\mathbf{T} \end{pmatrix} \mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{b}) \qquad (\mathbf{P} = \text{matrice dei pesi})$$

Ora $\begin{pmatrix} \mathbf{A}^\mathbf{T} \\ \mathbf{B}^\mathbf{T} \end{pmatrix} \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{PA} & \mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{PB} \\ \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{PA} & \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{PB} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{C}} \\ \tilde{\mathbf{C}}^\mathbf{T} & \tilde{\mathbf{B}} \end{pmatrix}$

Moltiplicando a sinistra per $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{C}}^\mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}^{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, si ottiene il sistema

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{C}} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{C}}^\mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{C}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{t}} \\ \hat{\mathbf{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{C}}^\mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}^{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^\mathbf{T} \\ \mathbf{B}^\mathbf{T} \end{pmatrix} \mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{b})$$

in cui le 2 equazioni sono disaccoppiate, ed è possibile risolvere prima quella in $\hat{I}$ e poi sostituire nell'altra equazione il valore ottenuto.

L'equazione in $\hat{I}$ ha la forma

$(\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{PB} - \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{PA}(\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{PA})^{-1}\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{PB})\hat{\mathbf{I}} = (\mathbf{B}^\mathbf{T} - \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{PA}(\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{PA})^{-1}\mathbf{A}^\mathbf{T})\mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{b})$, ossia $\mathbf{B}^\mathbf{T}\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{B}^\mathbf{T}\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{y} - \mathbf{b})$, con $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} - \mathbf{PA}(\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{PA})^{-1}\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{P}$; essa deriva dalla minimizzazione della forma quadratica $(\mathbf{y} - \mathbf{BI} - \mathbf{b})^\mathbf{T}\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{y} - \mathbf{BI} - \mathbf{b})$. La minimizzazione viene allora eseguita sui valori di I con tutte le componenti intere.

Bilancio fra numero di equazioni e di incognite

Considerando le misure di fase su una singola frequenza, il numero totale di osservazioni in un intervallo temporale contenente n_t epoche, in cui vengono osservati n_s satelliti, è $n_t n_s$.

Nel caso statico le incognite sono le 3 coordinate del punto, n_t errori di sincronizzazione (uno per ogni epoca) e n_s ambiguità intere (una per ogni satellite, purché non ci siano cycle-slips). Quindi deve essere $n_t n_s > 3 + n_t + n_s$, ossia $n_t > (3 + n_s)/(n_s - 1)$ (quindi almeno 3 epoche con 4 satelliti, almeno 2 se il numero di satelliti è maggiore).

Nel caso cinematico ad ogni epoca cambiano le coordinate del punto, quindi in totale le incognite sono $4n_t + n_s$. Di conseguenza deve essere $n_t n_s > 4n_t + n_s \Rightarrow n_t > n_s/(n_s - 4)$. Quindi i satelliti osservati devono essere almeno 5, e il numero di epoche è in ogni caso maggiore che nel caso statico.