Roto-traslazione con cambiamento di scala (in $\mathbf{R}^2$)

La forma generale della trasformazione è $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + \lambda \mathbf{R}\mathbf{s}$ (1), dove

$$\mathbf{r} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; \bar{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \; \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \; \mathbf{s} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Linearizzazione:

$$\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + (\lambda_0 + \delta\lambda)(\mathbf{R}_0 + \delta\mathbf{R})(\mathbf{s}_0 + \delta\mathbf{s}) \qquad (2),$$

da cui, al I ordine,

$$\delta\mathbf{r} - \lambda_0 \mathbf{R}_0 \delta\mathbf{s} = \bar{\mathbf{r}} + \delta\lambda \mathbf{R}_0 \mathbf{s}_0 + \lambda_0 \delta\mathbf{R}\mathbf{s}_0 + \lambda_0 \mathbf{R}_0 \mathbf{s}_0 - \mathbf{r}_0 \qquad (3),$$

dove

$$\mathbf{R}_0 = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 \\ -\cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \end{pmatrix} \delta\theta$$

La (3) in forma esplicita diventa

$$\begin{aligned}
&\delta x - \lambda_0 \cos\theta_0 \delta u - \lambda_0 \sin\theta_0 \delta v = \bar{x} + (\cos\theta_0 u_0 + \sin\theta_0 v_0)\delta\lambda + \lambda_0(-\sin\theta_0 u_0 + \cos\theta_0 v_0)\delta\theta + \\
&+ \lambda_0(\cos\theta_0 u_0 + \sin\theta_0 v_0) - x_0 \qquad (4) \\
&\delta y + \lambda_0 \sin\theta_0 \delta u - \lambda_0 \cos\theta_0 \delta v = \bar{y} + (-\sin\theta_0 u_0 + \cos\theta_0 v_0)\delta\lambda + \lambda_0(-\cos\theta_0 u_0 - \sin\theta_0 v_0)\delta\theta + \\
&+ \lambda_0(-\sin\theta_0 u_0 + \cos\theta_0 v_0) - y_0
\end{aligned}$$

ovvero, in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda_0\cos\theta_0 & -\lambda_0\sin\theta_0 \\ 0 & 1 & \lambda_0\sin\theta_0 & -\lambda_0\cos\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta u \\ \delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos\theta_0 u_0 + \sin\theta_0 v_0 & \lambda_0(-\sin\theta_0 u_0 + \cos\theta_0 v_0) \\ 0 & 1 & -\sin\theta_0 u_0 + \cos\theta_0 v_0 & \lambda_0(-\cos\theta_0 u_0 - \sin\theta_0 v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \delta\lambda \\ \delta\theta \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} \cos\vartheta_0 & \sin\vartheta_0 \\ -\sin\vartheta_0 & \cos\vartheta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Questa forma è utile quando si vogliono utilizzare le misure delle coordinate di un certo numero di punti nei due sistemi di riferimento per stimare i parametri della trasformazione, dato che in questo caso a primo membro compaiono le osservabili, al secondo i parametri e il termine noto. La (5) riguarda un singolo punto; se i punti osservati sono n, si mettono in colonna, e di conseguenza il vettore delle osservabili ha $4n$ componenti, la matrice a I membro è $2n \times 4n$ diagonale a blocchi di 2×4, mentre a secondo membro il vettore dei parametri rimane a 4 componenti, la matrice è $2n \times 4$ e il termine noto ha $2n$ componenti.

La (5) ha la forma $\mathbf{Bz} = \mathbf{At} + \mathbf{b}$; le stime con il metodo dei minimi quadrati sono date da

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} &= \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{Bz} - \mathbf{b}) \\ \hat{\mathbf{z}} &= \mathbf{z} - \mathbf{QB}^T\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{Bz} - \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{t}}) \end{aligned} \qquad (6), \quad \text{dove} \qquad \begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{BQB}^T \\ \mathbf{N} &= \mathbf{A}^T\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A} \end{aligned}$$

In generale i valori approssimati delle osservabili sono posti uguali ai valori osservati:

$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$, $\mathbf{s}_0 = \mathbf{s} \Rightarrow \delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{s} = \mathbf{0}$. Per la scelta dei valori approssimati dei parametri, non è possibile dare una regola generale.

ESEMPIO NUMERICO: Si considerano 4 punti, le cui coordinate sono date dalla seguente tabella:

(x,y)	(u,v)
(0.014,1.049)	(0.506,0.702)
(1.033,0.987)	(0.701,0.494)
(1.017,-0.038)	(0.498,0.296)
(-0.021,0.027)	(0.303,0.502)

Osservando le posizioni di questi punti, si capisce che una scelta ragionevole dei valori approssimati dei parametri è $\theta_0 = \pi/4$, $\lambda_0 = 1/(0.2\sqrt{2})$.
La scelta di $\mathbf{Q}$ è dettata da informazioni a priori sull'incertezza delle diverse osservabili. Ad esempio, in questo caso si può scegliere $\mathbf{Q}$ diagonale con $\sigma_x = \sigma_y = 0.02$, $\sigma_u = \sigma_v = 0.005$ (l'unità di misura non è specificata, ma si assume che si la stessa per tutte le grandezze).

NOTA: la macchinosità formale di questo procedimento è dovuta al fatto che si è voluto variare sia $\mathbf{r}$ sia $\mathbf{s}$, assumendo che entrambi questi vettori siano osservabili affette da errore, e quindi da compensare. Tenendo fisso $\mathbf{s}$, e assumendo che solo $\mathbf{r}$ sia da compensare, la procedura si semplifica notevolmente. Infatti, posto $a = \lambda\cos\theta$, $b = \lambda\sin\theta$ (e quindi $\tan\theta = b/a$, $\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$) , la (1) diventa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v & 1 & 0 \\ v & -u & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix},$$

che è un problema lineare con parametri $a, b, \bar{x}, \bar{y}$ e osservabili x , y , mentre u , v sono numeri fissi noti.

NOTA: l'impostazione del problema in $\mathbf{R}^3$ è analoga, ma è formalmente più complicata, dato che la rotazione dipende da 3 parametri (angoli intorno ad assi coordinati), rispetto a cui deve essere linearizzata. Inoltre è notevolmente più difficile trovare valori approssimati per questi angoli a partire dalle coordinate misurate dei punti nei 2 sistemi di riferimento.

Minimi quadrati sequenziali

Accade a volte, dopo avere determinato la stima di un vettore di parametri $\mathbf{x}$ con il metodo dei minimi quadrati a partire da un insieme di osservabili, di avere a disposizione un nuovo insieme di osservabili che consente di aggiornare la stima di $\mathbf{x}$. Ovviamente è possibile rifare il calcolo della stima utilizzando l'intero insieme di osservabili e ignorando il risultato precedentemente ottenuto. Tuttavia è interessante vedere se esistono relazioni semplici fra le due stime, che consentono di eseguire l'aggiornamento utilizzando i risultati ottenuti in precedenza e semplificando in qualche modo le procedure di calcolo.

Per analizzare questo problema si considera un modello lineare $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n, k < n)$, dove il vettore delle osservabili è diviso in 2 pezzi, entrambi di dimensione maggiore di k, che rappresentano le osservabili disponibili originariamente e quelle aggiunte successivamente: $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}$, e di conseguenza $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$.

Quindi $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{b}) \quad (\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1})$, dove si assume che $\mathbf{P}$ abbia la forma a blocchi $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix}$, che esprime il fatto che le 2 serie di osservabili sono fra loro incorrelate. Di conseguenza $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^T & \mathbf{A}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_1^T\mathbf{P}_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2^T\mathbf{P}_2\mathbf{A}_2 \equiv \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2$, e inoltre $\mathbf{A}^T\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^T\mathbf{P}_1 & \mathbf{A}_2^T\mathbf{P}_2 \end{pmatrix}$. Allora, posto $\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{A}_1^T\mathbf{P}_1(\mathbf{y}_1 - \mathbf{b}_1)$ (che rappresenta la stima di $\mathbf{x}$ ottenuta dalle osservabili originariamente disponibili, si ottiene

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{N}^{-1}\Big(\mathbf{A}_1^T\mathbf{P}_1(\mathbf{y}_1 - \mathbf{b}_1) + \mathbf{A}_2^T\mathbf{P}_2(\mathbf{y}_2 - \mathbf{b}_2)\Big) = \mathbf{N}^{-1}\Big(\mathbf{N}_1\hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_2^T\mathbf{P}_2(\mathbf{y}_2 - \mathbf{b}_2)\Big) = \\
&= \mathbf{N}^{-1}\Big((\mathbf{N} - \mathbf{N}_2)\hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_2^T\mathbf{P}_2(\mathbf{y}_2 - \mathbf{b}_2)\Big) = \hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}_2^T\mathbf{P}_2(\mathbf{y}_2 - \mathbf{b}_2 - \mathbf{A}_2\hat{\mathbf{x}}_1) \ .
\end{aligned}
$$

L'ultimo termine evidenzia come la stima generale $\hat{\mathbf{x}}$ può essere ottenuta da quella iniziale $\hat{\mathbf{x}}_1$ aggiornandola con l'aggiunta di un termine che si ottiene applicando una trasformazione lineare allo scarto fra il vettore $\mathbf{y}_2$ delle osservabili aggiunte e la sua stima $\hat{\mathbf{y}}_2^{(1)} = \mathbf{A}_2\hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{b}_2$ in termini del vettore dei parametri stimato sulla base delle osservabili precedentemente disponibili. La matrice $\mathbf{K} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}_2^T\mathbf{P}_2$ che realizza la trasformazione è detta *matrice guadagno*.

Bisogna però osservare che il calcolo di $\mathbf{K}$ richiede in ogni caso l'inversione della matrice completa $\mathbf{N}$; quindi, la procedura di aggiornamento descritta richiede ancora l'uso del modello lineare completo, e non soltanto di quella parte relativa alle osservabili acquisite successivamente.