

Laurea specialistica

Ambiti di applicazione del metodo dei minimi quadrati in ambito topografico-geodetico-fotogrammetrico:

Caso lineare:

- reti di livellazione (le osservabili sono i dislivelli, i parametri le quote)
- reti GPS: le baselines rilevate in sessioni diverse vengono utilizzate come pseudo-osservabili, i parametri sono le coordinate dei punti. L'impostazione è simile a quella delle reti di livellazione, salvo che baselines e punti hanno 3 componenti. NOTA: le baselines di ciascuna sessione, essendo pseudo-osservabili (ossia non misurate direttamente), sono in generale correlate, ma non è detto che i software di elaborazione dei dati GPS forniscano le correlazioni fra componenti di baselines diverse.

Caso non lineare:

- reti topografiche classiche (le osservabili sono angoli e distanze, i parametri le coordinate dei vertici)
- sessioni GPS, paragonabili a reti classiche puramente distanziometriche. Le osservabili sono pseudo-range o differenze di fase (o loro differenze; in questo caso sono pseudo-osservabili e correlate); i parametri sono coordinate di punti o componenti di baselines, oltre alle ambiguità intere, agli errori di sincronizzazione, e, in caso di doppia frequenza, agli errori ionosferici.
- trasformazioni di coordinate (ad esempio, in fotogrammetria). Le osservabili sono coordinate di punti nei due sistemi di coordinate, i parametri sono componenti della traslazione, angoli di rotazione, fattore di scala. NOTA in questo caso, per n punti in uno spazio 3D, le osservabili sono $6n$ ($3n$ per ognuno dei 2 sistemi di coordinate), le equazioni di osservazione sono $3n$
- georeferenziazione. Le osservabili sono le coordinate dei punti sull'immagine, ed eventualmente quelle sul terreno o sulla carta di riferimento (queste ultime sono talvolta considerate note senza errore); i parametri individuano una procedura di interpolazione (ad esempio polinomiale).

Discussione degli errori grossolani

Verifica di ipotesi $\hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$ (dato a priori sulla base di assunzioni sull'accuratezza delle misure).

L'ipotesi potrebbe non essere soddisfatta per una delle seguenti cause:

- errori di linearizzazione (valori approssimati non adeguati). In questo caso il valore di $\hat{\sigma}_0^2$ potrebbe ridursi in successive iterazioni del processo di stima, in cui viene adottato come valore approssimato quello stimato nell'iterazione precedente. L'iterazione viene interrotta quando il valore di $\hat{\sigma}_0^2$ si stabilizza.
- errori di modello (ad esempio se si impongono valori noti di coordinate inaccurati). In questo caso la compensazione tiene ovviamente fissi i valori noti e scarica i loro errori introducendo scarti anormalmente grandi sulle osservazioni.
- errori grossolani (*outliers*) su un piccolo numero di misure

OUTLIERS

1. Non è detto che la presenza di un outlier si traduca in uno scarto particolarmente alto nella misura corrispondente: il metodo dei minimi quadrati tende a ridistribuire e omogeneizzare gli scarti. Un caso ben noto è quello in cui si misurano i 3 angoli di un triangolo: se le misure sono indipendenti e con la stessa precisione, gli scarti si equiripartiscono, indipendentemente da dove si è commesso l'errore di misura. Quindi, se ad esempio si misura un angolo con un errore di 1^0 , in modo che la somma è 181^0 , gli angoli stimati con il metodo dei minimi quadrati hanno scarti di $1/3^0$ ciascuno. Un altro caso è illustrato dal seguente esempio:

ESEMPIO – Si consideri un modello lineare $y = At$ con $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Per la linearità, si può

considerare l'effetto dell'outlier separatamente; si consideri quindi un vettore di osservazioni

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad A^T A = 14; \quad \hat{t} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{14}; \quad \hat{y} = A\hat{t} = \begin{pmatrix} 3/14 \\ 6/14 \\ 9/14 \end{pmatrix}; \quad y - \hat{y} = \begin{pmatrix} -3/14 \\ -6/14 \\ 5/14 \end{pmatrix}$$

Quindi, l'effetto dell'outlier sulla 3. componente è di determinare uno scarto più grande sulla 2. che sulla 3. componente.

NOTA – In realtà, un confronto diretto fra gli scarti come visto nell'esempio precedente non ha molto senso. Infatti è possibile che certi scarti siano più grandi di altri perché, data la forma del modello lineare (che nel caso topografico rispecchia la geometria della rete) e in virtù della legge di propagazione degli errori, risulta maggiore la probabilità di scarti più grandi, ossia è più grande lo scarto quadratico medio. Più corretto sarebbe confrontare gli *scarti standardizzati*, ossia divisi per i loro sqm. Nel caso presente la matrice di covarianza degli scarti è

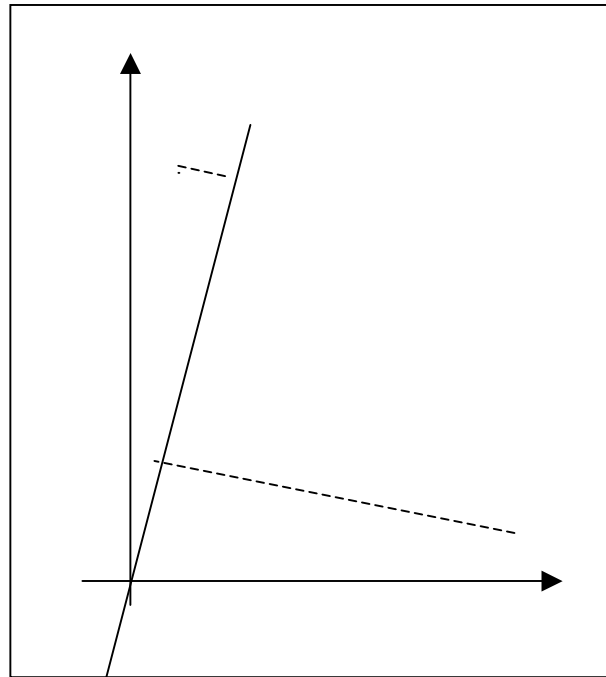
$$C_\varepsilon = \sigma_0^2 (I - A(A^T A)^{-1} A^T) = \frac{\sigma_0^2}{14} \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

e quindi gli sqm dei 3 scarti sono rispettivamente $\sigma_0 \sqrt{\frac{13}{14}}, \sigma_0 \sqrt{\frac{10}{14}}, \sigma_0 \sqrt{\frac{5}{14}}$. Si verifica immediatamente che lo scarto standardizzato della terza componente è maggiore di quello della seconda.

2. Si osservi che, se ci sono più outliers, possono compensarsi fra di loro. Ad esempio, se uno dei 3 angoli di un triangolo ha un errore di 1^0 in eccesso e un altro di 1^0 in difetto, la somma è 180^0 e il calcolo del $\hat{\sigma}_0^2$ non evidenzia alcuna situazione anomala (e le stime che ne risultano sono ovviamente deviate). Nel seguito si prende sempre in considerazione soltanto il caso di un singolo outlier.

3. ESEMPIO - Si consideri nel piano x_1, x_2 la retta di equazione $x_2 = 5x_1$, ossia $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}t \\ x_2 = t \end{cases}$

(vedi figura), e si supponga che tale retta rappresenti la relazione funzionale fra 2 grandezze x_1 e x_2 che vengono misurate; si assuma che gli errori di misura siano incorrelati e con eguale sqm σ . Si assuma inoltre che l'origine sia collocata in corrispondenza del valore "vero" della quantità misurata, per cui x_1 e x_2 rappresentano in realtà gli scarti. Si supponga ora che una delle 2 misure dia come risultato σ , in accordo con la precisione attesa, mentre l'altra sia un outlier di valore 10σ . Già dalla figura è evidente che nel caso i): $(x_1 = 10\sigma, x_2 = \sigma)$ si ha uno scarto elevato e una stima relativamente vicina a $(0,0)$, mentre nel caso ii): $(x_1 = \sigma, x_2 = 10\sigma)$ si ha



una stima fortemente errata e uno scarto piccolo (e quindi non si evidenzia niente, perché ovviamente il valore della quantità misurata non è noto a priori).

Dai calcoli risulta $(\hat{t} = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{a_1^2 + a_2^2}, \begin{pmatrix} a_1 = 1/5 \\ a_2 = 1 \end{pmatrix})$

$$\text{i) } \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.58 \\ 2.88 \end{pmatrix} \sigma, \quad \begin{pmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_2 - \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.42 \\ -1.88 \end{pmatrix} \sigma, \quad \hat{\sigma}^2 = 92.27 \sigma^2$$

$$\text{ii) } \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.96 \\ 9.81 \end{pmatrix} \sigma, \quad \begin{pmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_2 - \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.96 \\ 0.19 \end{pmatrix} \sigma, \quad \hat{\sigma}^2 = 0.96 \sigma^2$$

A livello di significatività $\alpha = 0.05$ la condizione per accettare il valore ipotizzato a priori di σ è $\hat{\sigma}^2 / \sigma^2 < 3.84$; quindi soltanto nel caso i) l'ipotesi viene rifiutata e viene evidenziata la possibile presenza di un outlier.

4. ESEMPIO – Si supponga ora di eseguire, indipendentemente e con la stessa precisione, la misura di un'ulteriore quantità legata linearmente al parametro t (ad es. $x_3 = t$); si pone l'origine dell'asse x_3 in corrispondenza del valore corretto di tale quantità. Il risultato della misura sia

$x_3 = \sigma$. Allora $\hat{t} = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, a_3 = 1$.

$$\text{i) } \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.39 \\ 1.96 \\ 1.96 \end{pmatrix} \sigma, \quad \begin{pmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_2 - \hat{x}_2 \\ x_3 - \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.61 \\ -0.96 \\ -0.96 \end{pmatrix} \sigma, \quad \hat{\sigma}^2 = 94.16 \sigma^2$$

$$\text{ii) } \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.10 \\ 5.49 \\ 5.49 \end{pmatrix} \sigma, \quad \begin{pmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_2 - \hat{x}_2 \\ x_3 - \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.10 \\ 4.51 \\ -4.49 \end{pmatrix} \sigma, \quad \hat{\sigma}^2 = 20.25\sigma^2$$

In questo caso, a livello di significatività $\alpha = 0.05$ la condizione per accettare il valore ipotizzato a priori di σ è $2\hat{\sigma}^2 / \sigma^2 < 5.99$. Come si vede, l'aggiunta della misura di x_3 "irrobustisce" la stima, cioè consente in entrambi i casi di evidenziare l'outlier.

OSSERVAZIONE – I due comportamenti osservati (scarto grosso, oppure stima molto deviata e scarto piccolo) sono in un certo senso complementari, e dipendono dalla direzione del vettore errore di misura (molto vicina ad un asse, dato che l'outlier è uno solo): se questa direzione è vicina ad essere ortogonale alla varietà, si ha grosso scarto e stima accettabile, se è vicina ad essere parallela, si ha piccolo scarto e stima molto deviata. Se la varietà è inclinata rispetto a tutti gli assi, un outlier dà luogo in parte a errori di stima, in parte ad un'amplificazione degli scarti.

5. Ovviamente nei casi pratici, in cui il numero di osservabili e di parametri può essere elevato, non è facile descrivere l'effetto degli outliers in termini geometrici semplici. Da un punto di vista algebrico, gli scarti sono espressi come funzioni lineari delle osservazioni:

$\hat{\varepsilon} = y - \hat{y} = (I - A(A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1}) y = (Q - AN^{-1} A^T) Q^{-1} y \equiv Ry$ (per un modello lineare $y = At$), e quindi l'effetto $\delta\hat{\varepsilon}$ di un errore grossolano δy_i sull' i -esima misura dipende dalla i -esima colonna della matrice R . In particolare l'elemento diagonale $r_i = R_{ii}$ misura quanto l'outlier si ripercuote sullo scarto dell'osservabile corrispondente, gli altri elementi R_{ji} misurano quanto l'outlier si trasmette sugli scarti delle altre osservabili. Come si è visto dall'esempio del punto 1., l'effetto di un outlier può essere più grande sulle altre osservabili che sull'osservabile corrispondente.

$$\begin{pmatrix} \delta\hat{\varepsilon}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta\hat{\varepsilon}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & R_{1i} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & R_{2i} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & R_{ni} & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta y_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

La struttura di R non è semplice. Essa è una matrice quadrata $n \times n$, prodotto di due matrici simmetriche definite positive: $Q_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}} = Q - AN^{-1}A^T$ e Q^{-1} , ma questo non aiuta: in generale il prodotto di due matrici simmetriche e definite positive non è né simmetrico né definito positivo.

NOTA - R è idempotente ($R^2 = R$). Quindi può avere come autovalori soltanto 0 e 1. L'autovalore $\lambda = 0$ corrisponde a $\hat{\varepsilon} = 0$, il che avviene se y è sulla varietà $y = At$; l'autovalore $\lambda = 1$ corrisponde a $\hat{\varepsilon} = y \Rightarrow \hat{y} = 0$, il che avviene quando y appartiene al sottospazio $(n-k)$ -dim che verifica l'uguaglianza $y^T Q^{-1} A t = 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}^k$.

Si può osservare che:

- $Q - AN^{-1}A^T$, essendo definita positiva, ha elementi positivi sulla diagonale principale;

- se Q è una matrice diagonale (con elementi positivi), anche R ha elementi positivi sulla diagonale principale;
- lo stesso ragionamento si può fare per $AN^{-1}A^T$ e $AN^{-1}A^TQ^{-1}$. Quindi sia gli elementi diagonali di $AN^{-1}A^TQ^{-1}$, sia quelli di $I - AN^{-1}A^TQ^{-1}$, sono positivi e compresi fra 0 e 1;
- $\text{tr} R = \text{tr} I_{(n)} - \text{tr} A(A^TQ^{-1}A)^{-1}A^TQ^{-1} = n - \text{tr} (A^TQ^{-1}A)^{-1}A^TQ^{-1}A = n - \text{tr} I_{(k)} = n - k$ (ridondanza del numero di equazioni rispetto al numero dei parametri).

I termini r_i vengono usualmente chiamati *ridondanze locali* (relative cioè ad una singola osservazione). Il fatto che $0 < r_i < 1$ dice che l'effetto di un outlier sullo scarto dell'osservabile corrispondente è sempre attenuato: quanto più piccolo è r_i , tanto più l'outlier è mascherato.

6. ESEMPIO – Si consideri un insieme di misure di dislivello fra 6 punti, P_0, P_1, \dots, P_5 , da utilizzare per determinare le quote di P_i , $i = 1, 2, \dots, 5$, mentre la quota di P_0 è considerata nota e uguale a 0.

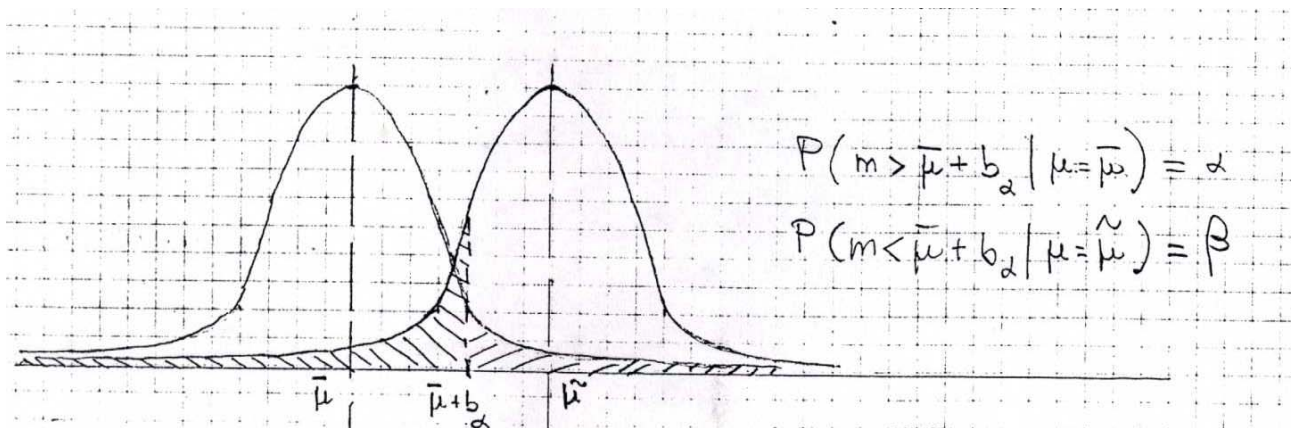
Inizialmente si prendono in considerazione tutte le possibili misure di dislivello, che sono 15 (quindi la ridondanza è 10). In questo caso si ha simmetria (ogni punto è collegato a tutti gli altri) e gli r_i sono tutti uguali. Quindi $r_i = 10/15 = 2/3$.

Si può verificare che cosa succede eliminando alcune delle misure. Si può vedere che:

- gli r_i relativi a osservazioni che connettono punti interessati dalle misure rimosse diminuiscono (questo si rifà al concetto di ridondanza: una misura è tanto meno ridondante, quanto meno numerose sono le altre misure che interessano gli stessi punti);
- viceversa, se i punti connessi non sono interessati a rimozioni di misure, gli r_i non cambiano.

7. L'*affidabilità interna* di una rete è misurata dal più piccolo errore grossolano riconoscibile come tale. Per precisare meglio il concetto, si pensi che, in assenza di errori grossolani, le misure hanno distribuzione gaussiana con valore atteso sulla varietà modello, che esprime la compatibilità con i vincoli imposti dalla geometria della rete: $E\{y\} = A\bar{t}$; la presenza di un errore grossolano può essere descritta come dovuta al fatto che la corrispondente misura è estrazione di una variabile aleatoria con lo stesso sqm ma con valore atteso deviato: $E\{y\} = A\bar{t} + \delta$. Di conseguenza $E\{\hat{y}\} = AN^{-1}A^TQ^{-1}E\{y\} = A\bar{t} + AN^{-1}A^TQ^{-1}\delta$, e $\hat{\varepsilon} = y - \hat{y}$ non ha più valore atteso nullo: $E\{\hat{\varepsilon}\} = R\delta$. Assumendo che l'errore grossolano sia unico e che quindi δ abbia una sola componente δ_i non nulla, si tratta di vedere qual è il minimo errore grossolano che consente di riconoscere che la distribuzione gaussiana di $\hat{\varepsilon}_i$ non ha valore atteso nullo.

Posto $Z = \hat{\varepsilon}_i / \sigma_{\hat{\varepsilon}_i}$, che ha distribuzione gaussiana con varianza 1 ($\sigma_{\hat{\varepsilon}_i}$ è facilmente calcolabile: infatti $\hat{\varepsilon} = Ry \Rightarrow C_{\hat{\varepsilon}} = RC_yR^T$, e $\sigma_{\hat{\varepsilon}_i}^2$ è l'elemento diagonale i-esimo di $C_{\hat{\varepsilon}}$), bisogna eseguire un test statistico per discriminare fra le ipotesi alternative $H_0 : E\{Z\} = 0$ e $H_1 : E\{Z\} = \mu \neq 0$. Bisogna fissare un livello di significatività α , che è la probabilità di accettare H_1 quando è vera H_0 , e una potenza β , che è la probabilità di accettare H_0 quando è vera H_1 . In questo caso, in cui le due densità di probabilità sono semplicemente traslate di μ una rispetto all'altra, è ragionevole scegliere $\alpha = \beta$.



In questo caso, supponendo $\mu > 0$, è ovvio che si sceglie H_0 se $Z < \mu/2$ e H_1 in caso contrario; i valori di μ che rendono significativa la discriminazione fra le due ipotesi al livello di significatività scelto (ad esempio, $\alpha = 0.05$) sono quelli per cui $P\{Z > \mu/2 | H_0\} = P\{Z < \mu/2 | H_1\} < \alpha$; per $\alpha = 0.05$ si ottiene $\mu = 3.30$.

NOTA - Nel caso particolare di misure omogenee, con $C_y = \sigma^2 I$, si ha $C_{\hat{\varepsilon}} = \sigma^2 R R^T = \sigma^2 R^2 = \sigma^2 R \Rightarrow \sigma_{\hat{\varepsilon}_i} = \sigma \sqrt{R_{ii}}$; inoltre, se δy_i è un singolo outlier, $\hat{\varepsilon}_i \cong R_{ii} \delta y_i \Rightarrow \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\sigma \sqrt{R_{ii}}} \cong \frac{\delta y_i}{\sigma} \sqrt{R_{ii}}$. Quest'ultima formula ci dice quanto grande deve essere

l'outlier per essere riconosciuto come tale, evidenziando che deve essere tanto più grande quanto più piccola è la ridondanza locale.

Riprendendo l'esempio 3., si ha $R_{11} = 25/26$, $R_{22} = 1/26$, e quindi, qualitativamente, è chiaro che un outlier sulla misura x_1 si evidenzia molto più facilmente di un outlier sulla misura x_2 . Questo è dovuto alla forte asimmetria del modello ($a_1 = 1/5$, $a_2 = 1$). Non è tuttavia possibile un confronto numerico diretto fra i risultati dell'esempio 3. e il criterio di affidabilità qui illustrato.

Nei casi pratici, ad esempio nella progettazione di una rete topografica, la matrice R è nota a priori, ed è quindi possibile, prima di eseguire le misure, valutare l'affidabilità interna della rete rispetto alle diverse misure previste.

E' importante prendere in considerazione anche l'*affidabilità esterna*, che è misurata dal massimo effetto sui parametri stimati (le coordinate dei vertici) di un errore grossolano non riconosciuto. Anch'essa può essere quantificata da ben definiti test statistici, che qui non vengono descritti. L'affidabilità esterna può essere riferita a tutti i parametri nel loro complesso, oppure a singoli parametri o gruppi di parametri (ad esempio, le coordinate di un punto, o di un piccolo insieme di punti di interesse).