

Lezione n. 22

Stati limite nel cemento armato Il taglio nel c.a.

La valutazione della resistenza a taglio di una sezione in cemento armato è piuttosto complessa, e l'approccio usuale adottato nella scienza delle costruzioni non è spesso applicabile.

L'analisi del problema viene effettuata per passi successivi: prima si analizza la distribuzione delle tensioni tangenziali in una trave senza armature specifiche che, come si vedrà in seguito, possono essere preposte ad assorbire lo sforzo di taglio; successivamente si analizza il comportamento della stessa trave nel caso in cui sia presente un'armatura specifica a taglio; infine si approfondiranno gli aspetti specifici legati alla condizione di stato limite ultimo per taglio, ossia del comportamento "a rottura" della trave per sollecitazioni taglianti.

Le tensioni da taglio in condizioni di esercizio

Come è noto dalla teoria della Scienza delle Costruzioni, gli sforzi di taglio in una trave sono sempre accompagnati dalla presenza di una flessione (la condizione $T \neq 0$ implica infatti $M \neq 0$, rappresentando lo sforzo di taglio la derivata della caratteristica di sollecitazione flettente).

La presenza del momento flettente provoca inoltre la parzializzazione della sezione a causa della pressoché nulla resistenza a trazione del calcestruzzo.

Considerando quindi una generica sezione della trave, l'unica componente della risultante relativa ad ogni sezione è una forza nel piano della sezione passante per il centro di taglio (e di solito accompagnata da momento flettente M).

Le tensioni tangenziali: si calcolano applicando la formula di Jourawski alla sezione parzializzata omogeneizzata a calcestruzzo

$$\tau = \frac{T \cdot S_{ci,x}}{J_{ci,x} \cdot b(y)}$$

dove

$S_{ci,x}$ = momento statico della sezione compresa tra lembo compresso e fibra dove si calcola τ

$J_{ci,x}$ = momento di inerzia sezione ideale equivalente

$b(y)$ = larghezza della sezione all'altezza dove si calcola τ

Sezione rettangolare

La tensione tangenziale massima τ_{max} si registra in corrispondenza dell'asse neutro e si mantiene costante fino all'acciaio in quanto al di sotto dell'asse neutro le tensioni normali σ sono nulle, per l'ipotesi di non resistenza a trazione del calcestruzzo. Di conseguenza, il momento statico della sezione, al di sotto dell'asse neutro, rimane costante fino a che non si incontrano le armature tese, che riportano il valore del momento statico a zero.

In corrispondenza dell'asse neutro (che è baricentrico) la tensione tangenziale τ è massima ed è pari a:

$$\tau_{max} = \frac{T}{b \cdot z}$$

infatti $S_{ci,x} = S_{cls} = nS_a$

$$J_{ci} = J_c + J_a = S_{cls} \cdot z_c + nS_a \cdot z_a = S_{cls} \cdot (z_c + z_a) = S_{cls} \cdot z_c = S_x \cdot z$$

quindi la τ_{max} si può riscrivere:

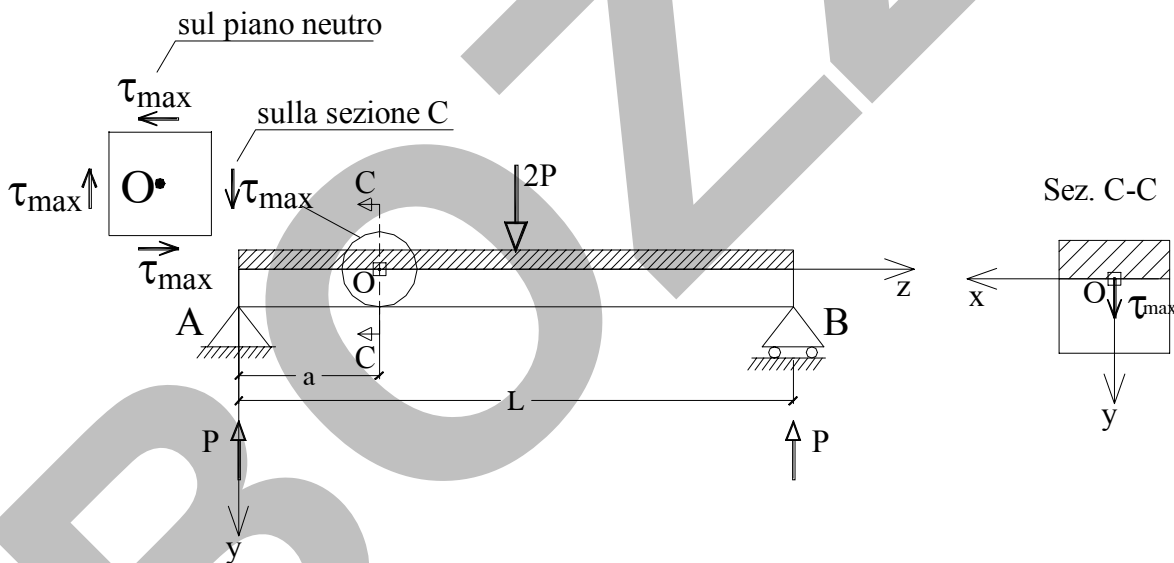
$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot S_x}{J_x \cdot b} = \frac{T}{b \cdot z}$$

Il traliccio di Mörsch per la definizione dell'armatura a taglio

Alla fine dell'ottocento, primi del novecento, Mörsch propose di schematizzare il comportamento di travi di c.a. soggette a flessione e taglio con un traliccio di aste tese e compresse, di cui un corrente compresso di calcestruzzo, un tirante teso di acciaio ed un insieme di aste di parete inclinate a 45° rispetto all'orizzontale. Oggi la schematizzazione proposta da Mörsch è nota come **traliccio di Mörsch** ed è utilizzata, oltre che per il progetto delle armature a taglio di travi di c.a. nel metodo delle tensioni ammissibili, anche nel metodo agli stati limite per il calcolo del carico di collasso (seppure con alcune modifiche riguardanti in particolare l'inclinazione delle aste di parete). Inoltre questa schematizzazione è alla base della tecnica "strut-and-tie" messa a punto dalla scuola di Stoccarda del Prof. J. Schlaich per il progetto di elementi tozzi di c.a., laddove non è possibile applicare la teoria classica del De S. Venant, ed in particolare l'ipotesi di Bernoulli-Navier di conservazione delle sezioni piane.

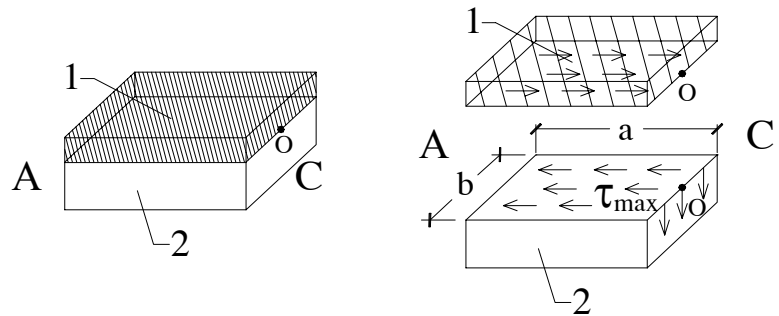
Come nasce l'idea di schematizzare una trave di c.a. con un traliccio di aste inclinate a 45° rispetto all'orizzontale? Per dare una risposta a questa domanda si consideri la trave illustrata nella figura seguente, dove si ipotizza che l'armatura longitudinale sia costante lungo tutta la trave, cosicché sia la posizione dell'asse neutro sia il braccio della coppia interna non variano lungo la trave.

Si prenda un punto O sull'asse neutro della sezione C posta a sinistra del carico; in O ci sarà solo la tensione tangenziale prodotta dal taglio, mentre quella normale è nulla perché O è sull'asse neutro.

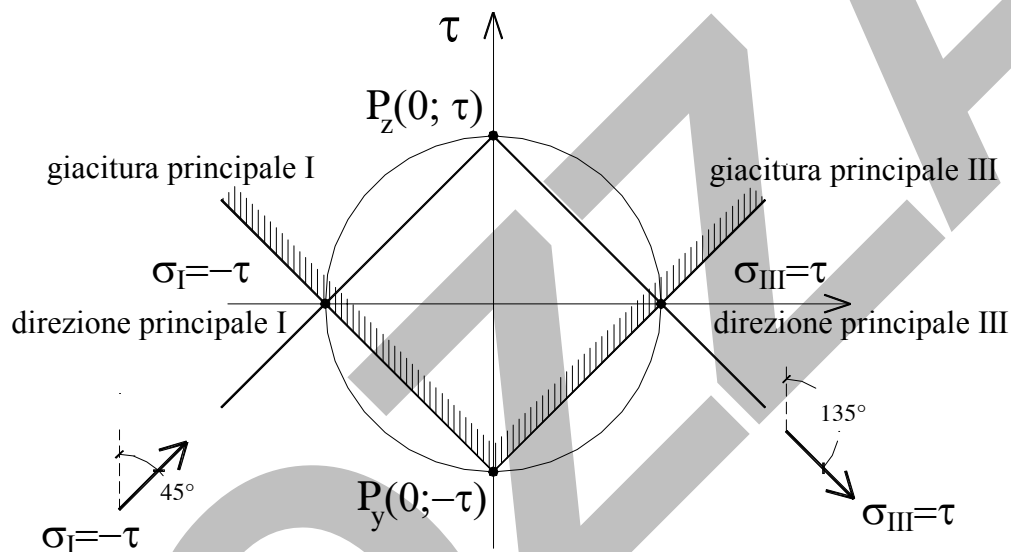


Sull'elementino infinitesimo del piano y-z centrato in O, per la reciprocità delle tensioni tangenziali, si hanno le tensioni rappresentate in alto a sinistra in figura: ossia accanto alle tensioni tangenziali sul piano verticale della sezione si hanno tensioni dello stesso tipo ed intensità sul piano neutro.

Pertanto dividendo la trave in due parti lungo questo piano, restano evidenziate le tensioni tangenziali orizzontali che le due parti si scambiano. In particolare le tensioni trasmesse nel tratto AC dalla parte superiore a quella inferiore sono dirette da destra verso sinistra (come illustrato nella figura seguente).

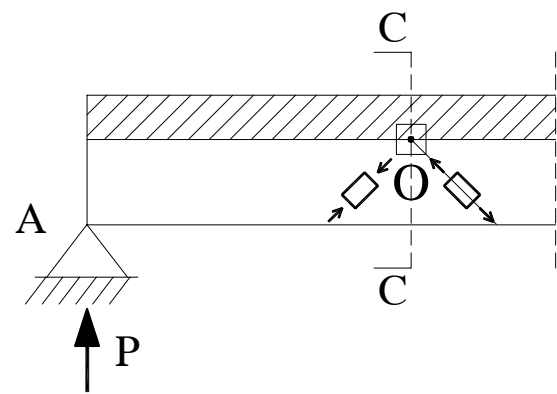


Se si traccia il circolo di Mohr dello stato tensionale nel punto O, si ottiene un cerchio centrato nell'origine del piano σ - τ , come rappresentato in figura, dove P_z e P_y sono i punti rappresentativi dello stato di tensione sulle giaciture di normale z e y.

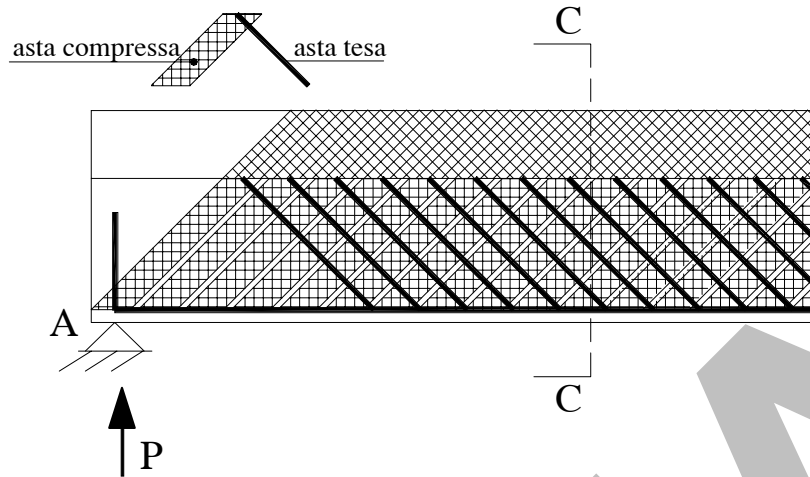


Dall'esame del circolo di Mohr risulta che il taglio puro provoca una tensione di trazione e una di compressione di uguale intensità τ .

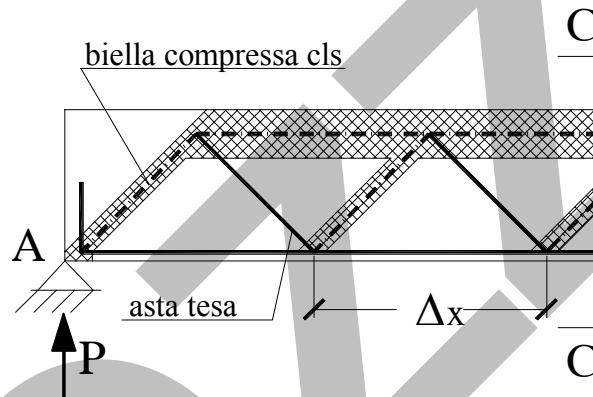
La direzione principale di compressione risulta inclinata di 45° in senso orario rispetto alla verticale ascendente, mentre quella principale di trazione è inclinata di 135° in senso antiorario rispetto alla stessa retta. Dal punto O si può allora immaginare che si dipartano verso la parte inferiore della trave due aste inclinate delle quali una sopporta la tensione principale di compressione e l'altra quella di trazione, come indicato nella figura seguente.



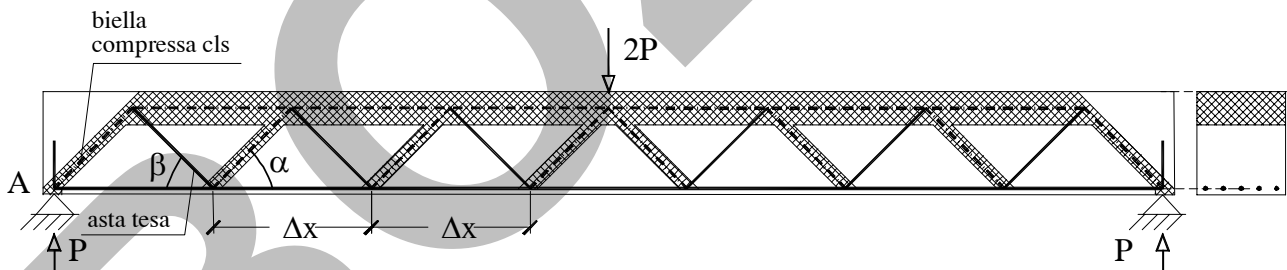
Lo stesso discorso può essere ripetuto per tutte le altre sezioni della trave, per cui lo sforzo di "scorrimento" presente sul piano neutro (ossia al risultante delle tensioni tangenziali sul piano orizzontale che contiene l'asse neutro) si può immaginare che venga trasmesso ai ferri inferiori attraverso un insieme continuo di bielle compresse e tese.



Discretizzando questo sistema continuo con un traliccio di aste compresse e tese poste ad interasse Δx si ottiene il traliccio rappresentato in figura:



che esteso a tutta la trave assume la seguente configurazione:



Passando alla destra del carico cambia il segno del taglio e pertanto la direzione delle aste compresse e quella delle aste tese si scambiano.

Nel traliccio di Mörsch le aste compresse sono formate da cls (corrente superiore e puntoni inclinati, in generale, di un angolo α , solitamente 45°), mentre le aste tese sono formate da apposite armature disposte secondo un certo angolo β (quello naturale è a 45° secondo le direzioni della trazione).

Se si indica con Δx l'interasse tra le armature resistenti a taglio e si considera un concio di lunghezza Δx ad es. alla sinistra del carico $2P$, si può valutare l'ammontare dello sforzo di scorrimento su tale elemento. Infatti, essendo il taglio costante e pari a P , per l'ipotesi che il braccio della coppia interna z non vari, anche le tensioni tangenziali sul piano neutro di questo concio si mantengono costanti e pari a τ_{\max} :

$$\tau_{\max} = \frac{T}{b \cdot z}.$$

Lo scorrimento totale sul concio è dato dal prodotto delle tensioni tangenziali per l'area della porzione di piano neutro compresa nel concio:

$$\Omega = \tau_{\max} \cdot b \cdot \Delta x .$$

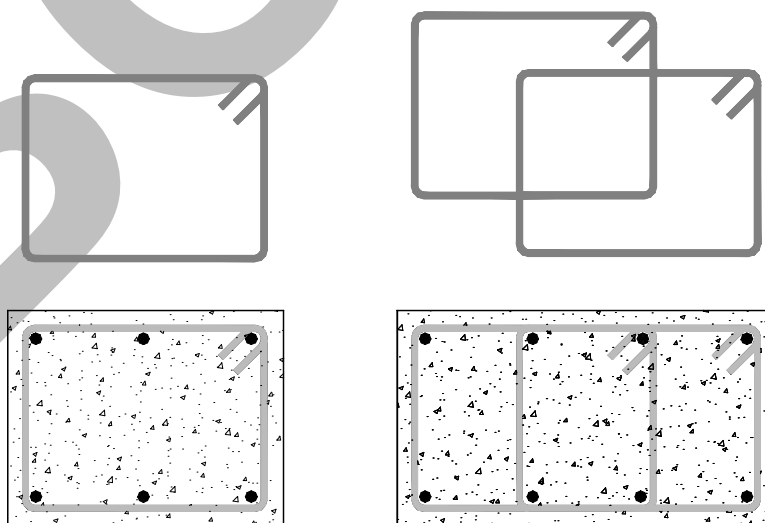
Nello schema individuato, questo sforzo viene trasferito all'armatura inferiore mediante le due aste di parete tesa e compressa. In realtà, come verrà evidenziato nel successivo paragrafo, è possibile il trasferimento di tale sforzo anche in assenza di armature specifiche resistenti al taglio, facendo affidamento, almeno in parte, sulla resistenza a trazione del calcestruzzo: nell'ottica del metodo agli stati limite, si individua quindi il valore del taglio ultimo che una sezione può assorbire in funzione della presenza o meno di armatura a taglio nella trave.

Nel caso in cui si dispongano armature atte ad assorbire lo sforzo di taglio, queste dovrebbero naturalmente seguire l'inclinazione delle direzioni su cui si ha trazione (o, come si dice nell'ambito della Scienza delle Costruzioni, la direzione delle "isostatiche di trazione", ossia delle linee che hanno per tangente la direzione principale di trazione). In questo caso si dovrebbero quindi disporre "ferri piegati" a 45°, in misura e numero consoni all'assorbimento dello sforzo. Tali armature sono state effettivamente disposte nelle travi in c.a., anche se oggi non si usano praticamente più e si preferisce procedere attraverso la disposizione di armature diverse, ossia costituite da "staffe" verticali a due o più "bracci".

Le staffe sono costituite da elementi chiusi in acciaio, di diametro abbastanza piccolo (solitamente Ø8 o Ø10, raramente più grossi, a causa della difficoltà dell'operazione di piegatura), sagomate come in figura e disposte ad un "passo" di solito nell'intervallo 10÷30 cm e comunque al massimo paragonabile all'altezza della sezione. Tali armature, anche se meno efficienti dei ferri piegati nell'assorbimento dello sforzo di taglio, presentano almeno tre vantaggi:

- risultano di più facile confezionamento, permettendo l'assemblaggio di "gabbie" di armature a piè d'opera che vengono successivamente inserite nella cassetta (e quindi conducono generalmente a costi di manodopera inferiori);
- rappresentano per il calcestruzzo compresso una sorta di "confinamento" che conferisce alla trave (nella sua componente compressa) una maggiore duttilità e resistenza;
- contrastano la possibile instabilità delle armature compresse riducendone la lunghezza libera di inflessione.

Le staffe vengono individuate quindi da tre parametri: il diametro Ø, il numero dei bracci ed il passo, per cui nei disegni di carpenteria del c.a. si trovano, ad esempio, diciture del tipo "st. Ø8/10" a due bracci", dove la scrittura /10" indica, convenzionalmente, il passo a cui tali elementi sono disposti.



(a)

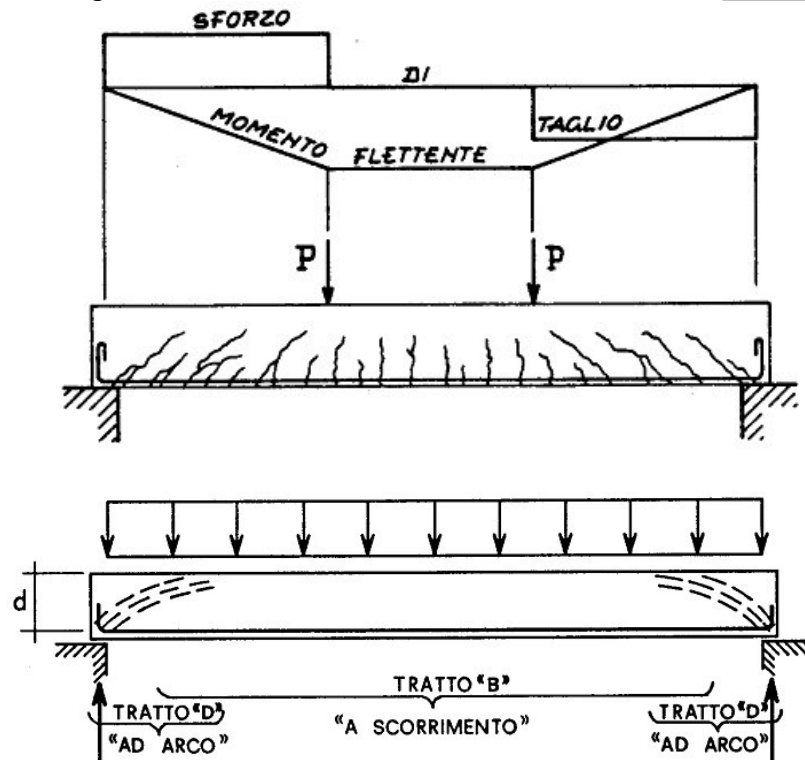
(b)

Staffa a due bracci (a) e a quattro bracci (b)

SLU: meccanismi resistenti in elementi non armati a taglio

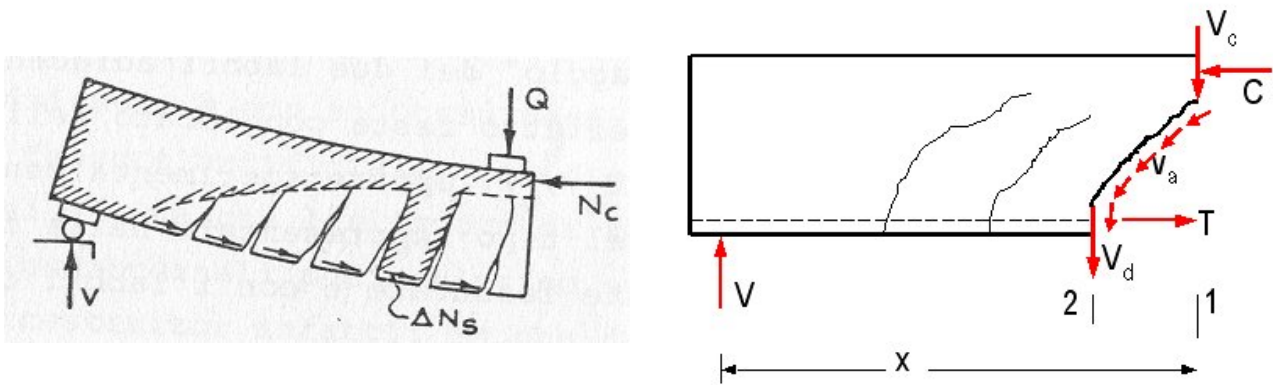
Una serie di risultati sperimentali hanno mostrato che il comportamento di una trave in c.a. sottoposta a taglio è abbastanza complesso e dipende (anche se solo in parte) dalla resistenza a trazione del calcestruzzo.

In particolare, anche senza la presenza di un'armatura specifica destinata ad assorbire lo sforzo di taglio, si ha comunque una resistenza non trascurabile nei confronti del taglio, sebbene in presenza delle inevitabili fessure dovute all'azione flettente. Con riferimento all'esempio di una trave appoggiata con un tratto sottoposto a momento flettente costante, si individuano due zone distinte, caratterizzate da un diverso andamento delle fessure e da due conseguenti modelli di comportamento nei confronti dell'azione tagliante.



- nel tratto centrale, in cui le fessure dovute al momento flettente hanno andamento pressoché verticale, si individua un meccanismo resistente definito “a pettine” (o anche “effetto mensola”), in cui le parti di calcestruzzo comprese tra due fessure consecutive si comportano come mensole incastrate nella parte superiore della trave (che risulta, a causa del momento positivo, compressa);
- nei due tratti laterali (in cui le fessure tendono a disporsi, a causa della progressiva diminuzione di momento flettente, secondo inclinazioni a 45°), nascono dei meccanismi diffusivi che vengono definiti “ad arco”, che consentono allo sforzo di taglio di trasferirsi verso gli appoggi dalla zona compressa della trave, che appunto si atteggia secondo un arco all'interno della trave stessa.

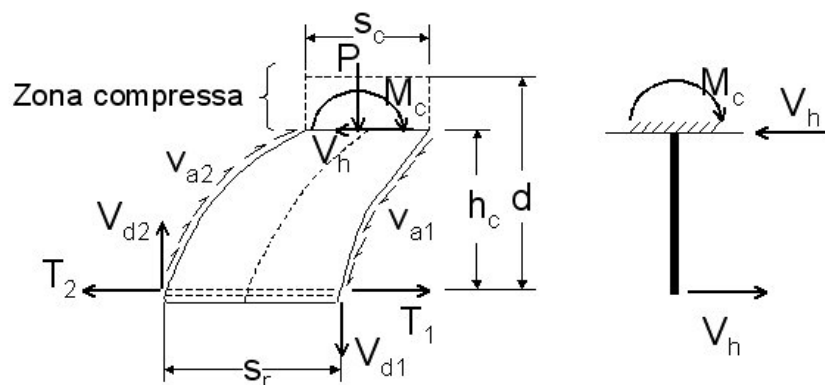
Lo studio della resistenza a taglio è normalmente condotto nelle zone in cui prevale il comportamento a pettine, in quanto sufficientemente lontano da zone di discontinuità dovute alla presenza dei carichi concentrati rappresentati dagli appoggi.



Nelle zone di comportamento “a pettine” (o tratti a scorrimento), il taglio esterno V è trasmesso dalle singole “mensole” di calcestruzzo, con ulteriori contributi alla resistenza dovuti a:

- un’azione bietta o spinotto (“dowel action”) esercitata dall’armatura longitudinale inferiore V_d ;
- la componente verticale delle forze di attrito che sono esercitate sulle due superfici separate da una fessura quando due conci d’anima tendono a scorrere l’uno sull’altro V_a (ingranamento degli inerti o “aggregate interlock”);
- una forza di taglio trasmessa attraverso la parte compressa della sezione V_c (contributo della compressione assiale).

Il comportamento a pettine è schematizzabile attraverso lo schema seguente, in cui si assimila il funzionamento del calcestruzzo compreso tra due fessure a quello di una mensola incastrata nella parte compressa della trave, ed in cui si sono evidenziati anche i due contributi V_a e V_d :



Schema del comportamento “a mensola” dei denti di calcestruzzo

Il momento flettente M_c a cui è sottoposta la mensola corrisponde al valore

$$M_c = V_h \cdot h_c = (T_1 - T_2) \cdot (d - x)$$

dove x rappresenta l’altezza della zona compressa della trave e $T_1 - T_2$ è la differenza di trazione nell’armatura tesa (dovuta allo scorrimento)

$$T_1 - T_2 = \frac{V}{z} \cdot s_c$$

e quindi si ha

$$M_c = \frac{V}{z} \cdot s_c \cdot (d - x)$$

Il massimo momento che la mensola può sopportare è legato alla resistenza del calcestruzzo. Dal momento che nella sezione rettangolare di incastro (di dimensione $s_c \times b$, essendo b la larghezza della trave) la tensione massima è pari a (nell'ipotesi di sezione interamente reagente):

$$f_{c,max} = \frac{M_c}{W} = \frac{M_c}{\frac{s_c^2 \cdot b}{6}} = \frac{6 \cdot M_c}{s_c^2 \cdot b}$$

Il massimo momento corrisponde a quello per cui si raggiunge la resistenza a trazione del calcestruzzo (per sollecitazioni di flessione), che può essere stimata in

$$f_{cfd} = 1.2 \cdot f_{ctd}$$

Si ha quindi

$$M_{c,max} = \frac{f_{cfd} \cdot s_c^2 \cdot b}{6}$$

che corrisponde ad un valore massimo del taglio V trasmesso attraverso la mensola pari a

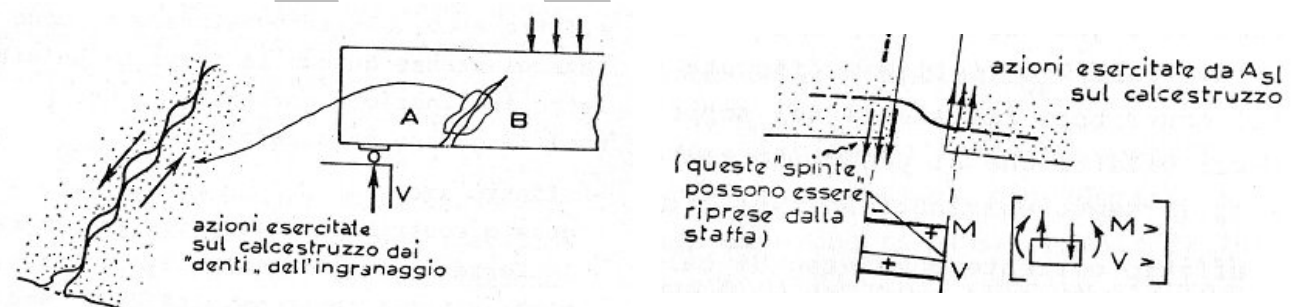
$$V_{c,max} = \frac{M_{c,max} \cdot z}{s_c \cdot (d-x)} = \frac{f_{cfd} \cdot s_c \cdot b \cdot z}{6 \cdot (d-x)}$$

Approssimando l'ampiezza della zona compressa in $x \approx 0.3d$, e quindi $z = d - x/3 \approx 0.9d$, ed ipotizzando che $s_c \approx d$, come emerge da numerose rilevazioni sperimentali, si ottiene

$$V_{c,max} \approx \frac{1.2 \cdot f_{ctd} \cdot d \cdot b \cdot 0.9d}{6 \cdot 0.7d} \approx \frac{1.2 \cdot 0.9}{6 \cdot 0.7} \cdot f_{ctd} \cdot d \cdot b = 0.25 \cdot f_{ctd} \cdot d \cdot b$$

che rappresenta una stima della resistenza a taglio della trave in calcestruzzo dovuta al solo effetto "pettine" (o mensola).

I contributi dovuti agli altri effetti precedentemente indicati (effetto bietta, effetto ingranamento, effetto dovuto alla compressione assiale) vengono tenuti in conto introducendo dei fattori correttivi alla resistenza appena ricavata.



Effetto di "ingranamento degli inerti" (a sinistra) ed effetto "bietta" (a destra)

L'effetto dell'ingranamento degli inerti è dovuto alle pressioni di contatto lungo la superficie della fessura che delimita i denti di calcestruzzo, ed è quindi un contributo che dipende dall'attrito lungo le due superfici di contatto (tanto maggiore quanto più elevata è la scabrezza della superficie di fessurazione), dalla presenza eventuale di uno sforzo normale (che ovviamente favorisce l'effetto di ingranamento), dall'altezza della trave (l'effetto tende a diminuire per travi di altezza elevata, data la tendenza della fessura ad "aprirsi" tanto più quanto ci si allontana dalla zona compressa di estradosso della trave).

Da un punto di vista sperimentale, si osserva che l'effetto tende ad annullarsi per travi con altezza superiore a 60 cm, mentre riveste un ruolo anche rilevante per altezze inferiori. Il contributo

dell'ingranamento viene quindi usualmente considerato attraverso l'introduzione di un coefficiente amplificativo della resistenza di base, r , quantificabile in

$$r = 1.6 - d$$

con d espresso in m e $r \geq 1$ (ossia la formula vale solo per $d \leq 0.6$ m).

L'effetto bietta rappresenta il contributo dovuto alla presenza delle armature longitudinali all'interno delle fessure, che tendono a fornire un aumento di resistenza a causa della loro rigidità flessionale. L'effetto è limitato dal fatto che le spinte "a vuoto" che nascono nel calcestruzzo (si veda la parte sinistra della figura precedente) possono condurre alla rottura del calcestruzzo stesso ("sfondellamento"); l'effetto può essere quantificato in dipendenza dall'area dell'armatura longitudinale (tanto maggiore è l'area dell'armatura, tanto più elevato risulterà tale effetto) e dall'area del calcestruzzo all'interno del quale tale armatura è collocata.

L'incremento di resistenza al taglio può ancora essere espresso attraverso un coefficiente moltiplicativo della resistenza di base, quantificabile in

$$K_{\text{bietta}} = 1 + 50 \cdot \rho_1$$

dove

$$\rho_1 = \frac{A_{sl}}{b \cdot d}$$

rappresenta il rapporto geometrico di armatura (ossia il rapporto tra l'area dell'armatura longitudinale A_{sl} e l'area del calcestruzzo). Il valore di K_{bietta} deve risultare comunque non maggiore di 2.

Infine, l'effetto benefico dell'eventuale presenza di una compressione assiale può essere tenuto in conto introducendo un terzo coefficiente amplificativo della resistenza, δ , pari a

$$\delta = 1 + \frac{M_0}{M_{sdu}}$$

in cui M_0 rappresenta il momento di decompressione nella sezione analizzata, nella quale agisce M_{sdu} . In presenza di uno sforzo di compressione, il momento di decompressione rappresenta il valore del momento flettente per cui si ottiene il passaggio, nella fibra più esterna del calcestruzzo, da una tensione di compressione ad una di trazione. È evidente che l'effetto si perde se non agisce sforzo normale nella sezione (quindi, se $N=0$, si assume $\delta=1$) mentre l'eventuale presenza di uno sforzo normale di trazione non solo annulla l'effetto specifico, ma rende di fatto nulla l'intera resistenza a taglio della trave, non potendosi attivare i vari meccanismi descritti. In presenza di sforzo normale di trazione si assumerà quindi $\delta=0$.

Ricapitolando, la resistenza a taglio di una trave senza armature specifiche per resistere a tale sollecitazione può essere stimata con l'espressione riportata nel seguente prospetto:

Normativa



Nel caso di assenza di armature a taglio occorrerà valutare che

$$V_{rd} \geq V_{sdu}$$

con

$$V_{rd} = 0.25 \cdot f_{ctd} \cdot d \cdot b \cdot r \cdot (1 + 50 \cdot \rho_1) \cdot \delta$$

Elementi senza armatura resistente a taglio: considerazioni aggiuntive

Regola della traslazione dei momenti

Osservando il comportamento della parte di trave che viene isolata dalla presenza di una fessura, si nota che la tensione T nell'armatura longitudinale nella sezione 2 (più vicina all'appoggio) è determinata dal momento flettente della sezione 1 (dove, in generale, $M_1 > M_2$).

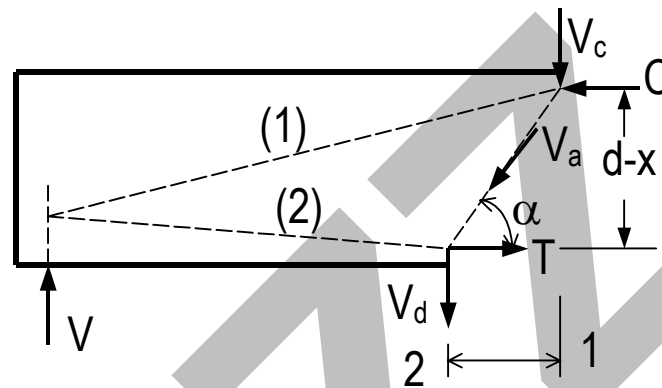
Nel progetto dell'armatura longitudinale nella sezione 2 occorre quindi considerare il momento agente nella sezione 1 (regola della traslazione del diagramma del momento flettente). Infatti si ottiene (dall'equilibrio alla rotazione)

$$T = \frac{M_2}{z} + V \cdot \cot g(\alpha) = \frac{M_2 + V \cdot z \cdot \cot g(\alpha)}{z}$$

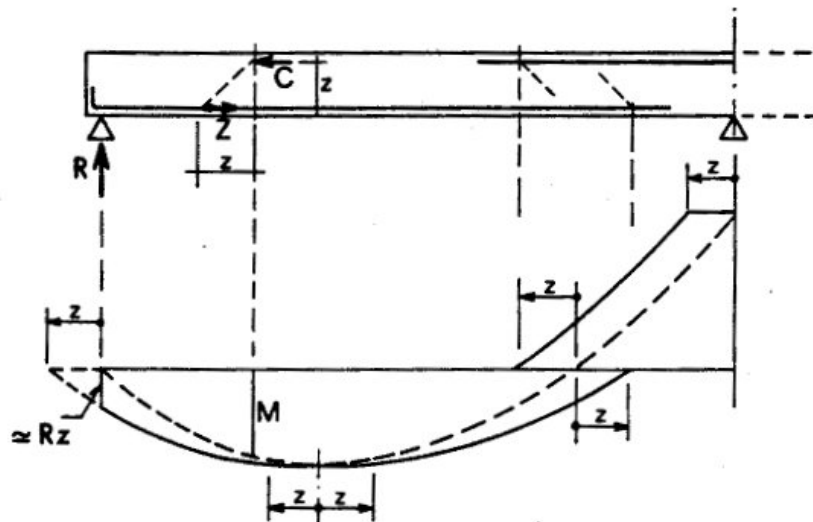
e quindi lo sforzo di trazione T è quello che competerebbe alla sezione che si trova in una posizione "traslata" della quantità $z \cdot \cot g(\alpha)$.

Se α è supposto di circa 45° , la distanza tra le sezioni 1 e 2 è circa uguale al braccio della coppia interna z (in questo caso infatti $\cot g(\alpha)=1$). Ancora più cautelativamente si può porre $z \approx d$, essendo d l'altezza utile della sezione, ovviamente operando a favore della sicurezza

$$z \cdot \cot g(\alpha) \approx z \approx d$$



In conseguenza della presenza delle fessure dovute al taglio, si deve quindi considerare un nuovo diagramma dei momenti flettenti, simile a quello riportato in figura

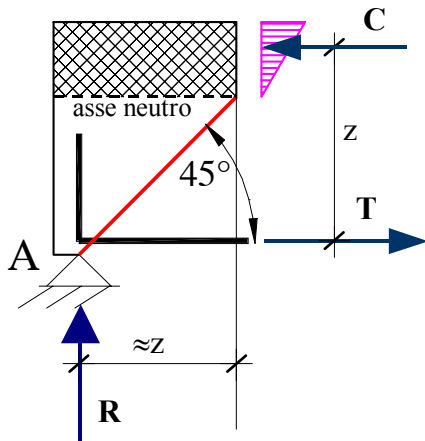


Regola della traslazione del momento

Prescrizioni in prossimità degli appoggi della trave

Dalla figura precedente, si nota come sull'estremo appoggiato a momento nullo, vada portata una quantità d'armatura "flessionale" (ossia longitudinale) pari alla reazione dell'appoggio R stessa essendo la forza $T=M/z$ calcolata in base al momento $M \approx R \cdot z$.

Infatti, se si considera lo stesso ragionamento effettuato in precedenza, l'equilibrio dell'elemento che si ottiene isolando la porzione di trave interrotta dalla presenza della prima fessura individua la condizione riportata nel seguito.



La condizione di equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante C delle azioni di compressione impone che

$$T \cdot z \approx R \cdot z$$

da cui

$$T \approx R$$

le armature longitudinali, cioè, anche se non devono assorbire trazione a causa dell'assenza di momento flettente, devono comunque essere dimensionate in modo da resistere ad una trazione pari alla reazione di appoggio, ossia al taglio presente all'appoggio sulla trave.

Minimi di armatura trasversale

Molte delle prescrizioni normative prevedono che, ad esclusione di alcuni elementi (ad esempio, piastre, in cui si ha un'adeguata capacità di ripartizione trasversale dei carichi), è in genere necessario disporre una quantità minima di armatura a taglio anche quando il calcolo non lo richiederebbe. La normativa italiana prevede un minimo di staffe di area complessiva A_{st} pari a

Normativa



L'area minima delle staffe deve risultare pari a

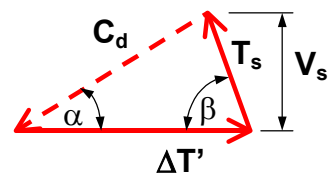
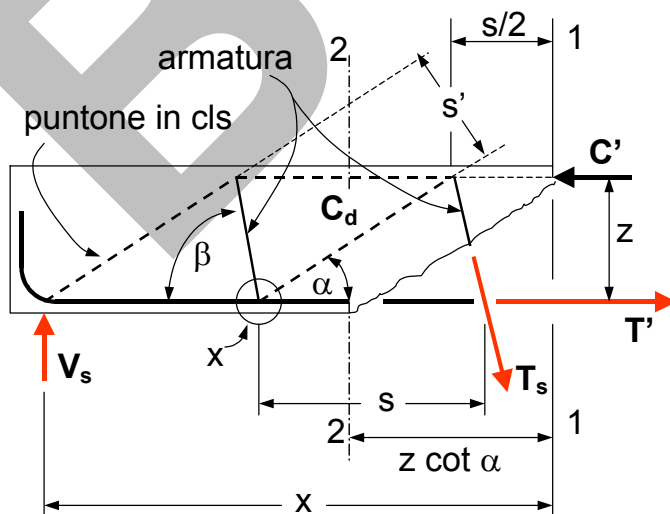
$$A_{st} = 0.10 \cdot \left(1 + 0.15 \cdot \frac{d}{b} \right) \cdot b$$

espressa in cm^2/m e dove b e d sono espressi in m , con un minimo di tre staffe a metro e passo non superiore a $0.8 d$.

SLU: meccanismi resistenti in elementi armati a taglio

Nel caso in cui siano presenti specifiche armature resistenti al taglio, per la determinazione degli sforzi si ricorre all'analogia del traliccio di Morsch, nella quale, analogamente a quanto fatto in precedenza, si immagina di avere una trave isostatica con le seguenti caratteristiche:

- montanti tesi inclinati di un angolo β sull'orizzontale (staffe o ferri piegati);
- puntoni compressi inclinati di un angolo α (puntoni di calcestruzzo);
- corrente superiore corrispondente al calcestruzzo compresso;
- corrente inferiore corrispondente all'armatura inferiore tesa.



Traliccio di Morsch allo Stato Limite Ultimo

La definizione dell'inclinazione generica α per le bielle compresse anziché 45° , come si è supposto fino ad ora, nasce dall'evidenza che l'effetto di ingranamento degli inerti fa sì che la risultante delle compressioni nel calcestruzzo possa trovarsi ad un'inclinazione inferiore rispetto all'angolo ideale offerto dal circolo di Mohr; le forze inclinate dovute all'ingranamento di fatto abbassano tale angolo, per cui si può impostare il problema in termini generali considerando un'inclinazione generica α .

L'equilibrio alla traslazione verticale del nodo X impone che

$$V_s = C_d \cdot \sin(\alpha) = T_s \cdot \sin(\beta)$$

dove

V_s taglio esterno

C_d compressione nel puntone

T_s risultante di tutte le forze nelle armature attraversate da una fessura

Dalla figura precedente si osserva inoltre che

$$s = z \cdot [\cot g(\alpha) + \cot g(\beta)]$$

$$s' = s \cdot \sin(\alpha)$$

Le bielle compresse, di spessore b e nelle quali agisce una tensione normale pari a f_c , sono in grado di fornire una risultante di compressione pari a

$$C_d = f_c \cdot b \cdot s' = f_c \cdot b \cdot s \cdot \sin(\alpha) = f_c \cdot b \cdot z \cdot \sin(\alpha) \cdot [\cot g(\alpha) + \cot g(\beta)]$$

e quindi possono equilibrare un taglio esterno pari a

$$V_s = C_d \cdot \sin(\alpha) = f_c \cdot b \cdot z \cdot \sin^2(\alpha) \cdot [\cot g(\alpha) + \cot g(\beta)]$$

Analogamente, se nelle armature, di area A_{sw} e disposte ad un passo s , agisce una tensione f_s , si ha

$$T_s = f_s \cdot A_{sw} = \frac{f_s \cdot A_{sw} \cdot s}{s} = \frac{f_s \cdot A_{sw} \cdot z \cdot [\cot g(\alpha) + \cot g(\beta)]}{s}$$

e conseguentemente possono assorbire uno sforzo di taglio pari a

$$V_s = T_s \cdot \sin(\beta) = \frac{f_s \cdot A_{sw} \cdot z \cdot \sin(\beta) \cdot [\cot g(\alpha) + \cot g(\beta)]}{s}$$

Il valore massimo del taglio che la trave può assorbire allo SLU è quindi offerto dalle relazioni precedenti, in cui alle tensioni indicate si sostituiscono i massimi valori delle tensioni che possono essere tenuti in conto nella verifica.

Si individuano cioè due valori del taglio resistente: il primo (detto taglio-compressione) è relativo alla massima resistenza delle bielle compresse in calcestruzzo; il secondo (taglio-trazione) è dovuto alla resistenza offerta dalle armature trasversali. E' evidente che il taglio resistente ultimo della trave sarà offerto dal più piccolo di questi due valori.

SLU: verifica a taglio in elementi con armature

Nella normativa vigente si procede analogamente a quanto descritto in precedenza, con due sole modifiche:

- si considera il cosiddetto metodo "normale" nel quale si fissa l'inclinazione delle bielle compresse in $\alpha=45^\circ$ (*);

(*) In alcune Normative (ad esempio nell'Eurocodice 2) è possibile anche fare riferimento a schemi di calcolo in cui, per quanto osservato in precedenza, si considerano inclinazioni diverse da 45° per i puntoni compressi, introducendo il metodo che prende il nome di "traliccio ad inclinazione variabile" e che non verrà riportato nelle presenti dispense.

- si tiene in conto, nella valutazione del taglio-trazione, anche del contributo offerto dal calcestruzzo teso (in maniera analoga a quanto fatto nella verifica a allo SLU per elementi senza armature a taglio).

Taglio-compressione

L'espressione individuata in precedenza può essere modificata introducendo, al posto di z , il valore approssimato $z \approx 0.9d$, ed imponendo la condizione $\alpha=45^\circ$, ottenendo

$$V_{Rd} = \frac{0.9}{2} \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d \cdot [1 + \cot g(\beta)] = 0.45 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d \cdot [1 + \cot g(\beta)]$$

In realtà la normativa impone un limite un po' più restrittivo, in quanto il coefficiente 0.45 viene posto pari a 0.30; tale correzione deriva dall'evidenza sperimentale che non è possibile attingere all'intera resistenza a compressione del calcestruzzo per la presenza delle fessurazione.

Normativa



Nel caso di presenza di armature a taglio occorrerà valutare che

$$V_{Rd} \geq V_{sdu}$$

con

$$V_{Rd} = 0.30 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d \cdot [1 + \cot g(\beta)]$$

Taglio-trazione

In questo caso si assume che il taglio-trazione possa essere valutato mediante l'espressione

$$V_{Rd} = V_{cd} + V_{wd}$$

in cui V_{cd} tiene in conto del contributo offerto dal calcestruzzo teso mentre V_{wd} quantifica l'apporto alla resistenza a taglio dovuto alla presenza delle armature trasversali.

Il valore di V_{cd} si può stimare con

$$V_{cd} = 0.60 \cdot f_{ctd} \cdot d \cdot b \cdot \delta$$

Come si può osservare, il taglio resistente lato calcestruzzo è lo stesso utilizzato nel caso di sezioni senza armature resistenti al taglio, con il coefficiente 0.60 al posto di 0.25 r ($1+50\rho_1$). In altre parole, si considera forfaitariamente il contributo offerto dall'effetto bietta e dall'ingranamento degli inerti.

Per V_{wd} , l'espressione proposta dalla normativa corrisponde a quella individuata in precedenza, con $z \approx 0.9d$ ed imponendo la condizione $\alpha=45^\circ$,

$$V_{wd} = 0.90 \cdot \frac{f_{ywd} \cdot A_{sw}}{s} \cdot d \cdot \sin(\beta) \cdot [1 + \cot g(\beta)] = 0.90 \cdot \frac{f_{ywd} \cdot A_{sw}}{s} \cdot d \cdot [\sin(\beta) + \cos(\beta)]$$

in cui con f_{ywd} si individua la tensione di snervamento di calcolo dell'armatura trasversale; nella Normativa Italiana si consiglia di sostituire tale valore con $0.8 f_{ywd}$ quando si considerino barre a taglio rialzate, cioè barre piegate.

Nel caso di presenza di armature a taglio occorrerà valutare che

Normativa



$$V_{Rd} = V_{cd} + V_{wd} \geq V_{sdu}$$

con

$$V_{cd} = 0.60 \cdot f_{ctd} \cdot d \cdot b \cdot \delta$$

$$V_{wd} = 0.90 \cdot \frac{f_{ywd} \cdot A_{sw}}{s} \cdot d \cdot [\sin(\beta) + \cos(\beta)]$$

Elementi con armatura resistente a taglio: considerazioni aggiuntive

Verifica armatura longitudinale

Analogamente a quanto visto nel caso della verifica della trave senza armature resistenti a taglio, va prevista un'opportuna traslazione del diagramma del momento flettente, che comporta la verifica delle armature longitudinali per una sollecitazione aggiuntiva rispetto a quella flessionale effettivamente presente. La normativa prescrive che occorre prevedere una traslazione del diagramma del momento flettente nel verso che dà luogo ad un aumento del momento stesso, quantificabile in

$$M_{sdu}(V) = M_{sdu} + V \cdot a_1$$

dove

$$a_1 = 0.9 \cdot d \cdot [1 - \cot g(\beta)] \geq 0.2 \cdot d$$

Prescrizioni sull'armatura trasversale

Nella verifica a taglio è evidente il ruolo fondamentale che rivestono le armature resistenti a taglio, soprattutto le staffe, in quanto:

- incrementano l'efficienza dei meccanismi resistenti a taglio, specialmente l'effetto spinotto;
- limitano la fessurazione diagonale favorendo l'effetto di ingranamento degli inerti;
- aumentano l'azione di confinamento, aumentando la resistenza a compressione del calcestruzzo e quindi aumentando la resistenza delle parti di trave in cui è presente l'effetto arco;
- prevengono la perdita di aderenza nelle zone dove si sviluppa le fessure da spacco "splitting cracking", a causa dell'effetto bietta e delle tensioni di aderenza.

Di conseguenza, in molte indicazioni normative si prevede che, in caso di necessità di inserire un'armatura a taglio, sia comunque presente una certa percentuale del taglio ultimo affidato alle staffe. Nell'Eurocodice 2 è riportato espressamente che "nelle travi le armature rialzate non devono essere utilizzate come armatura a taglio se non in combinazione con le staffe; almeno il 50% del valore di V_{Sdu} deve essere assorbito da staffe verticali".

Nella normativa italiana esiste ancora una prescrizione simile, anche se leggermente diversa, in quanto si prescrive che "la resistenza di calcolo dell'armatura d'anima deve risultare non inferiore alla metà del taglio di calcolo", quindi non effettuando una differenziazione tra staffe verticali e ferri piegati.

Appendice: verifica alle Tensioni Ammissibili

La Normativa impone il progetto dell'armatura a taglio solo se la τ_{max} , valutata secondo l'espressione

$$\tau_{max} = \frac{T}{b \cdot z},$$

supera un valore limite (τ_{c0}):

- se $\tau_{max} \leq \tau_{c0}$ occorre adottare un'armatura minima (necessaria per contrastare comunque l'instabilità delle barre longitudinali compresse e per esplicare un'azione di confinamento sul calcestruzzo), perché il calcestruzzo è in grado di trasferire valori bassi delle tensioni tangenziali dal cls compresso all'armatura tesa. Tale armatura minima vale per il caso delle travi;
- se $\tau_{max} > \tau_{c0}$ occorre progettare l'armatura a taglio e comunque deve risultare $\tau_{max} < \tau_{c1}$, affinché non si verifichi la rottura delle bielle compresse di cls (altrimenti è necessario ridefinire le dimensioni geometriche della sezione).

I due valori delle tensioni tangenziali ammissibili sono rispettivamente pari a:

$$\tau_{c0} = 0.4 + \frac{R_{ck} - 15}{75} \text{ N/mm}^2 \quad \left[\tau_{c0} = 4 + \frac{R_{ck} - 150}{75} \text{ kg/cm}^2 \right]$$

$$\tau_{cl} = 1.4 + \frac{R_{ck} - 15}{35} \text{ N/mm}^2 \quad \left[\tau_{cl} = 14 + \frac{R_{ck} - 150}{35} \text{ kg/cm}^2 \right]$$

Il calcolo dell'armatura a taglio, nel caso in cui

$$\tau_{c0} \leq \tau_{max} \leq \tau_{cl}$$

avviene utilizzando lo schema del traliccio di Mörsch in cui si considerano bielle compresse a 45° ed elementi tesi con la stessa inclinazione delle armature effettivamente presenti nella trave, quindi ferri piegati a 45° o staffe.

Normativa



La Normativa consente di utilizzare solo staffe oppure staffe e ferri piegati insieme; non è consentito l'utilizzo di soli ferri piegati!

In ogni caso almeno il 40 % dello sforzo di scorrimento deve essere assorbito da staffe.

Armatura a taglio minima (per elementi inflessi monodimensionali, ad es. travi):

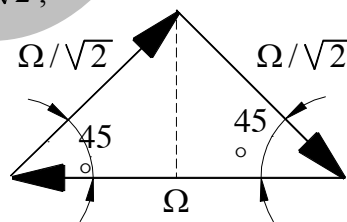
- almeno tre staffe al metro
- passo non superiore a 0,8 d (d = altezza utile)
- area minima pari a 0,10 β^* cm²/m, dove β^* è la larghezza corrispondente a τ_{c0} (ossia la larghezza dalla base della sezione per cui si giunge alla condizione $\tau_{max} = \tau_{c0}$)
- in prossimità di carichi concentrati o zone di appoggio per un tratto pari all'altezza utile della sezione da ciascuna parte del carico concentrato il passo deve essere non superiore a 12 ϕ_1 , essendo ϕ_1 il diametro minimo dell'armatura longitudinale

Ferri piegati

Lo sforzo di scorrimento Ω , dato dalla relazione vista in precedenza

$$\Omega = \tau_{max} \cdot b \cdot \Delta x = \frac{T}{b \cdot z} \cdot b \cdot \Delta x = \frac{T \cdot \Delta x}{z},$$

viene trasferito all'armatura inferiore mediante le due aste di parete inclinate a 45°; dal triangolo delle forze trasmesse al nodo risulta che nella biella compressa si ha uno sforzo pari a $-\Omega/\sqrt{2}$ e nell'asta tesa uno sforzo pari a $\Omega/\sqrt{2}$;



sostituendo l'espressione di Ω trovata sopra, la forza di trazione F_a in ogni ferro inclinato a 45° si può scrivere nella seguente forma:

$$F_a = \frac{\Omega}{\sqrt{2}} = \frac{T \cdot \Delta x}{z \cdot \sqrt{2}};$$

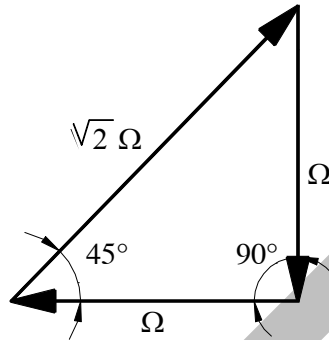
se $\bar{\sigma}_a$ è la tensione ammissibile dell'acciaio si ricava l'area minima che occorre attribuire a tali armature disposte a passo Δx :

$$A_a = \frac{T \cdot \Delta x}{z \cdot \sqrt{2} \cdot \bar{\sigma}_a}.$$

Staffe

Nel caso delle staffe, il triangolo delle forze trasmesse al nodo si modifica come indicato nella figura seguente, per cui lo sforzo nella biella compressa diventa $\sqrt{2} \Omega$ (pari al doppio del caso precedente) e la trazione F_a in ogni staffa diventa pari ad Ω , ossia:

$$F_a = \Omega = \frac{T \cdot \Delta x}{z}$$



quindi si ha uno sforzo maggiore, a parità di Δx , rispetto ai ferri piegati. L'area minima di ogni staffa è data da:

$$A_{st} = \frac{\Omega}{\bar{\sigma}_a} = \frac{T \cdot \Delta x}{z \cdot \bar{\sigma}_a}$$

e quindi

$$A_{st} = A_b \cdot n_b = \frac{T \cdot \Delta x}{z \cdot \bar{\sigma}_a},$$

dove si è indicato con A_b l'area di un singolo braccio della staffa e con n_b il numero di bracci.