

## CAPITOLO 5

### MODELLI REOLOGICI

La reologia è la scienza che studia l'andamento delle deformazioni nella materia sotto l'effetto dell'applicazione di un sistema di sollecitazioni. Uno degli obiettivi principali di questa disciplina è quello di caratterizzare il comportamento meccanico dei materiali mediante la definizione di modelli matematici che stabiliscano dei legami tra tensioni, deformazioni e tempo (detti *legami costitutivi*).

Anche nella meccanica dei terreni si ricorre generalmente all'impiego di modelli, ovvero di schemi più o meno semplificati, per l'interpretazione di fenomeni fisici complessi e per la previsione del comportamento dei vari mezzi in seguito all'applicazione di un sistema di sollecitazioni. Un aspetto importante da sottolineare è che un modello reologico non è legato solo al tipo di materiale, ma anche e soprattutto al fenomeno fisico che lo interessa; per questo motivo la scelta del tipo di modello è strettamente dipendente oltre che dal tipo di materiale, da quello dell'applicazione ingegneristica considerata.

Tra i modelli "classici", quelli di maggiore interesse nell'ambito della meccanica dei terreni sono:

- il modello *elastico*
- il modello *plastico*
- il modello *viscoso*

che possono essere assunti singolarmente o in combinazione tra loro.

Nella descrizione dei modelli reologici, riportata nei paragrafi seguenti, verranno adottati schemi monodimensionali e simboli convenzionali, per renderne più immediata la comprensione a livello qualitativo. Passando dagli schemi monodimensionali al mezzo continuo, al concetto di forza si sostituisce quello di tensione e al concetto di spostamento quello di deformazione.

#### 5.1 Modello elastico

Il comportamento di un corpo è definito elastico se le deformazioni prodotte da un sistema di sollecitazioni scompaiono una volta rimosse tali sollecitazioni. La relazione sforzi-deformazioni è biunivoca e indipendente dal tempo: una stessa sollecitazione produce sempre la stessa deformazione anche se applicata ripetutamente.

Il simbolo comunemente usato per rappresentare l'elasticità di un mezzo è una molla, e lo schema monodimensionale semplificato è quello rappresentato in Figura 5.1 (*schema di Hooke*).

Se si immagina di applicare una forza  $F$  all'estremità libera del carrello e di registrarne lo spostamento  $s$  (Figura 5.1), la relazione tra  $F$  ed  $s$  è del tipo:

$$F = f(s) \quad (\text{Eq. 5.1})$$

ed è rappresentata in Figura 5.2.

Se  $f(s)$  è una funzione lineare (linea (a) di Figura 5.2), ovvero:

$$F = K \cdot s \quad (\text{Eq. 5.2})$$

con  $K = \text{costante}$ , si parla di **comportamento elastico-lineare**, con  $K$  costante elastica del mezzo. Se dipende dal livello di sforzo (o di deformazione) raggiunto (curva (b) di Figura 5.2), si parla di legame **elastico non lineare**. La funzione che rappresenta un legame elastico non lineare può essere approssimata con una funzione lineare a tratti, su intervalli opportunamente piccoli dello spostamento.

Le principali applicazioni geotecniche per le quali viene spesso assunta l'ipotesi di comportamento elastico del terreno sono:

- il calcolo delle deformazioni nei terreni sovraconsolidati;
- l'analisi della diffusione delle tensioni nel terreno;
- il calcolo delle strutture di fondazione.

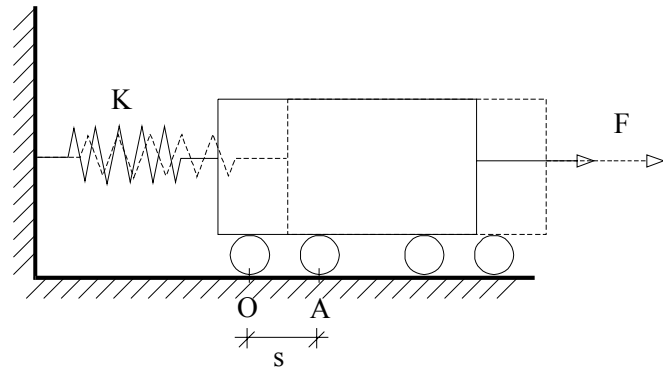


Figura 5.1. - Schema di Hooke per un mezzo elastico

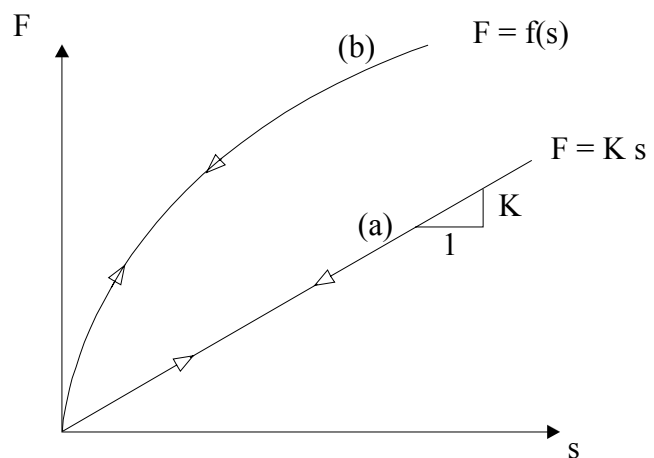


Figura 5.2. - Comportamento elastico lineare (a) e non lineare (b)

## 5.2 Modello plastico

Il **comportamento** di un corpo è definito **plastico** se, raggiunta una determinata soglia di sollecitazione, si manifestano deformazioni permanenti (ossia che si conservano anche una volta rimosse le sollecitazioni) e indipendenti dalla durata delle sollecitazioni applicate. La relazione sforzi-deformazioni è quindi indipendente dal tempo e non biunivoca: ad uno stesso valore della deformazione,  $s$ , possono corrispondere valori diversi della sollecitazione,  $F$ .

La plasticità di un mezzo può essere rappresentata mediante un pattino ad attrito, secondo lo schema monodimensionale semplificato rappresentato in Figura 5.3 (**schema di Coulomb**). Se si immagina di applicare una forza  $F$  all'estremità libera del carrello collegato al pattino, si osserva che non si hanno spostamenti fino a che la sollecitazione non raggiunge un valore limite  $F^*$ . In corrispondenza di tale valore lo spostamento plastico può avvenire a forza applicata costante (**mezzo plastico perfetto**) (linea (a) di Figura 5.4) oppure progredire con aumento della forza applicata (linea (b) di Figura 5.4) o diminuzione della forza applicata (linea (c) di Figura 5.4).

In questi casi si parla, rispettivamente, di **mezzo incrudente positivamente** o **negativamente**. Annullando la forza  $F$  non si ha alcun recupero dello spostamento accumulato come è possibile osservare in Figura 5.5; incrementando nuovamente la forza  $F$  il pattino rimarrà fermo nella posizione assunta sotto il carico precedente, fino a che l'intensità della forza applicata non raggiunge il nuovo valore limite  $F^*$ , che sarà uguale al precedente per mezzo plastico perfetto, maggiore per mezzo incrudente positivamente, minore per mezzo incrudente negativamente.

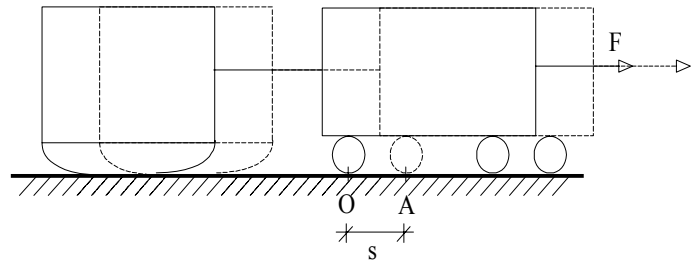


Figura 5.3 – Schema di Coulomb per un mezzo plastico

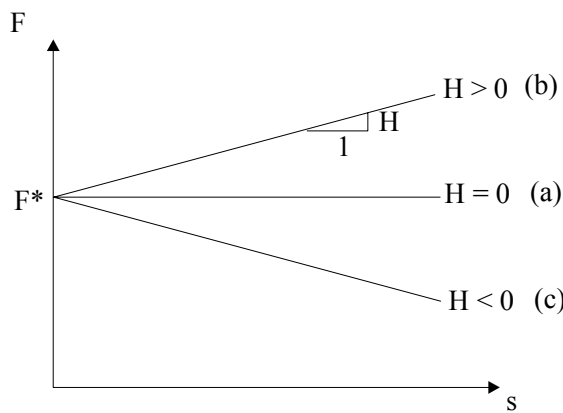


Figura 5.4 – Andamento tensioni-deformazioni per un mezzo plastico perfetto (a), incrudente positivamente (b) e negativamente (c).

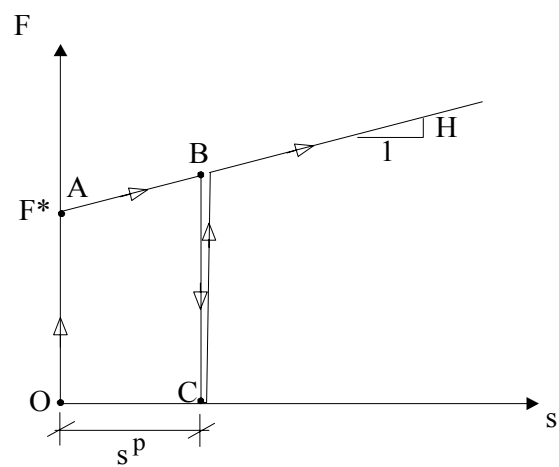


Figura 5.5 – Deformazione permanente per un mezzo plastico.

La relazione tra lo spostamento plastico,  $ds^p$ , e l'aliquota di forza che eccede  $F^*$ ,  $dF^*$ , è del tipo:

$$ds^p = \frac{1}{H} dF^* \tag{Eq. 5.3}$$

dove  $H$ , detto **coefficiente di incrudimento**, sarà uguale a zero per mezzo plastico perfetto, positivo per mezzo incrudente positivamente, negativo per mezzo incrudente negativamente.

Nelle applicazioni geotecniche l'ipotesi di comportamento plastico è assunta nella trattazione dei problemi di stabilità, per i quali si fa riferimento alle condizioni di equilibrio limite (capacità portante delle fondazioni, stabilità dei pendii, delle opere di sostegno, ecc..)

### 5.3 Modello viscoso

Il mezzo viscoso è caratterizzato da deformazioni permanenti che si sviluppano con una velocità legata alla sollecitazione applicata. La velocità di deformazione si annulla all'annullarsi della sollecitazione. Il simbolo con cui si rappresenta la viscosità di un mezzo è lo *smorzatore viscoso* (o ammortizzatore idraulico) costituito da un pistone forato che scorre in un cilindro pieno di liquido. Lo schema monodimensionale semplificato del modello è rappresentato in Figura 5.6 (*schema di Newton*).

Se si immagina di applicare una forza  $F$  all'estremità libera del carrello e di registrarne lo spostamento  $s$ , si osserva una relazione tra  $F$  e la velocità di spostamento  $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$ , ossia

(linea (a) di Figura 5.7):

$$F = f(\dot{s}) \quad (\text{Eq. 5.4})$$

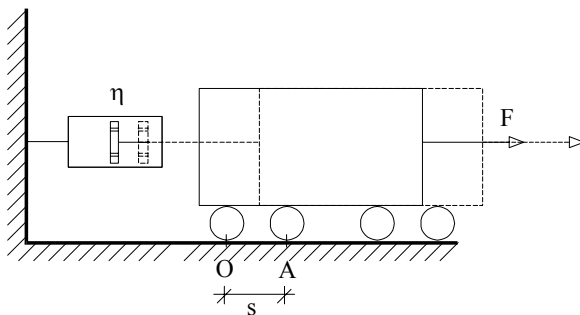


Figura 5.6 – Schema di Newton per un mezzo viscoso

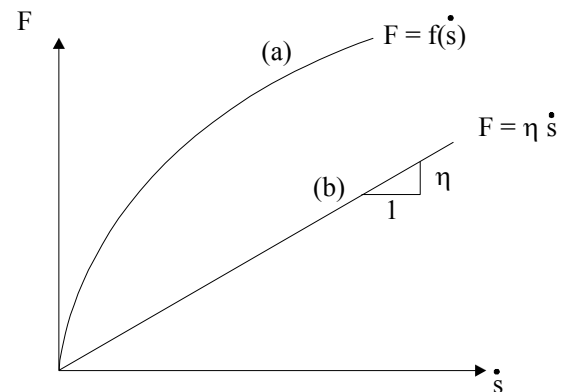


Figura 5.7 – Comportamento di un mezzo viscoso (a) e di un mezzo viscoso perfetto (b)

Se  $f(\dot{s})$  è una funzione lineare (linea (b) di Figura 5.7), ovvero:

$$F = \eta \cdot \dot{s} \quad (\text{Eq. 5.5})$$

con  $\eta = \text{costante}$ , si parla di *mezzo viscoso perfetto o newtoniano*, con  $\eta$  *viscosità* del mezzo.

### 5.4 Modelli reologici complessi

I modelli semplici descritti nei precedenti paragrafi possono essere combinati tra loro per ottenere in alcuni casi modelli più adatti a schematizzare il comportamento del terreno.

La combinazione può essere fatta in serie o in parallelo.

Nel primo caso lo spostamento risultante è la somma dei singoli spostamenti e la forza è la stessa per tutti i componenti; nel secondo caso la forza è la somma delle forze nei singoli componenti mentre lo spostamento è lo stesso.

Tra le possibili combinazioni verranno esaminate nel seguito:

- il modello elasto-viscoso in parallelo (modello di Kelvin –Terzaghi)
- il modello elasto-plastico incrudente

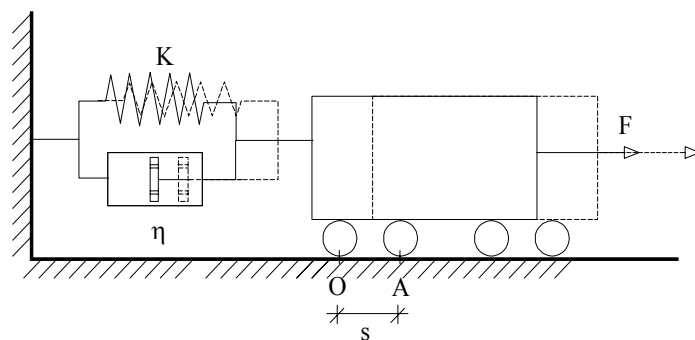
5.4.1 Modello elasto-viscoso in parallelo (modello di Kelvin –Terzaghi)

Lo schema monodimensionale semplificato che rappresenta questo modello è riportato in Figura 5.8.

Se  $F^e$  rappresenta la forza che agisce sulla molla,  $F^v$  quella agente sullo smorzatore,  $s^e$  ed  $s^v$  i rispettivi spostamenti, si ha:

$$F = F^e + F^v \tag{Eq. 5.6}$$

$$s = s^e = s^v \tag{Eq. 5.7}$$



Sostituendo ad  $F^e$  e  $F^v$  le rispettive espressioni in funzione  $s$  ed  $\dot{s}$  si ottiene:

$$F = Ks + \eta \dot{s} \tag{Eq. 5.8}$$

Integrando l'equazione precedente nell'ipotesi che lo spostamento iniziale sia nullo ( $s(0) = 0$ ) e che venga applicata istantaneamente una forza  $F = F_0$ , si ha:

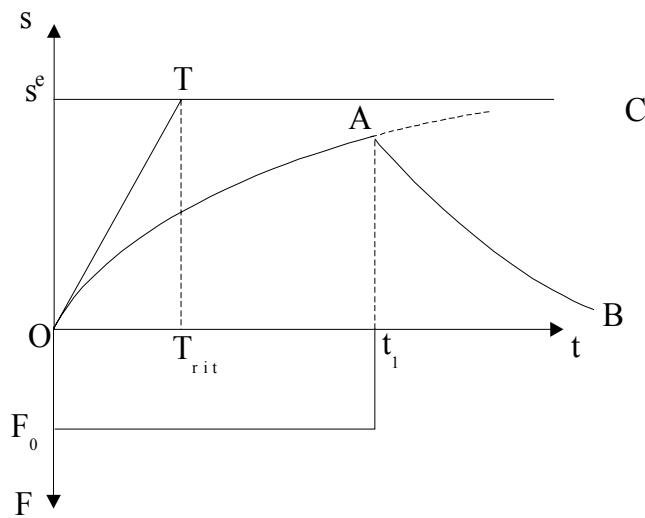
Figura 5.8 – Schema semplificato del modello di Kelvin-Terzaghi

$$s(t) = \frac{F_0}{K} \cdot \left(1 - e^{-\frac{tK}{\eta}}\right) = s^e \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_{rit}}}\right) \tag{Eq. 5.9}$$

dove  $T_{rit} = \eta/K$  è detto **tempo di ritardo**.

Lo spostamento progredisce nel tempo in funzione delle caratteristiche elastiche e viscoso del mezzo tendendo asintoticamente allo spostamento  $s^e$  che compete alla componente elastica (curva OAC in Figura 5.9).

La derivata dell'Eq. 5.9 è:  $\dot{s}(t) = \frac{s^e}{T_{rit}} \cdot e^{-\frac{t}{T_{rit}}}$  e per  $t = 0$  risulta:  $\dot{s}(t = 0) = \frac{s^e}{T_{rit}}$



Quindi  $T_{rit}$  rappresenta l'ascissa corrispondente al punto di intersezione tra  $s = s^e$  e la tangente nell'origine (indicato con T in Figura 5.9).

Se all'istante  $t_1$  la forza viene rimossa, il ritorno nella posizione originaria è ritardato dalla presenza dello smorzatore (curva AB in Figura 5.9).

Il modello di Kelvin-Terzaghi è utilizzato nell'interpretazione della teoria della consolidazione edometrica.

Figura 5.9 – Andamento nel tempo degli spostamenti nel modello di Kelvin-Terzaghi

#### 5.4.2 Modello elasto-plastico incrudente

Lo schema monodimensionale di questo modello è rappresentato da una molla ed un pattino ad attrito in serie (Figura 5.10). In questo caso, se si immagina di applicare una forza al carrello lo spostamento sarà inizialmente pari a quello elastico della molla.

Raggiunto il valore di soglia della forza,  $F^*$  (rappresentato dal punto A in Figura 5.11), inizierà a muoversi anche il pattino e l'incremento di spostamento  $ds$  del carrello, conseguente ad un incremento di forza  $dF^*$  (rappresentato in Figura 5.11 dal tratto AB), sarà dato da:

$$ds = ds^e + ds^p = \lambda dF^* \tag{Eq. 5.10}$$

essendo  $ds^e$  e  $ds^p$  gli incrementi di spostamento che competono rispettivamente alla molla e al pattino.

Essendo  $ds^e = k dF^*$ , con  $k$  pari all'inverso della costante elastica del mezzo,  $K$ , si avrà:

$$ds^p = ds - ds^e = (\lambda - k)dF^* \tag{Eq. 5.11}$$

Il coefficiente di incrudimento del mezzo sarà dato da:

$$H = dF^*/ds^p = 1/(\lambda - k) \tag{Eq. 5.12}$$

Con un modello elasto-plastico incrudente si interpreta la compressibilità edometrica dei terreni sovraconsolidati.

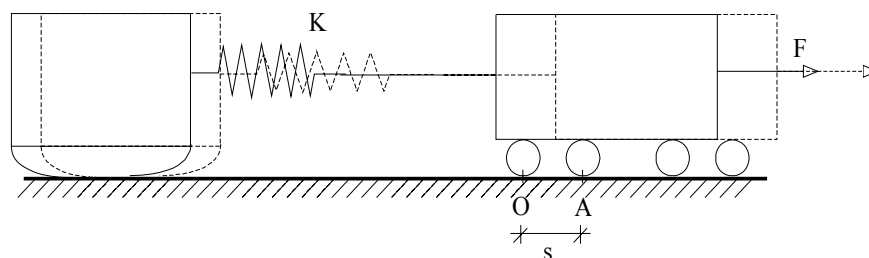


Figura 5.10 – Schema semplificato del modello elasto-plastico incrudente

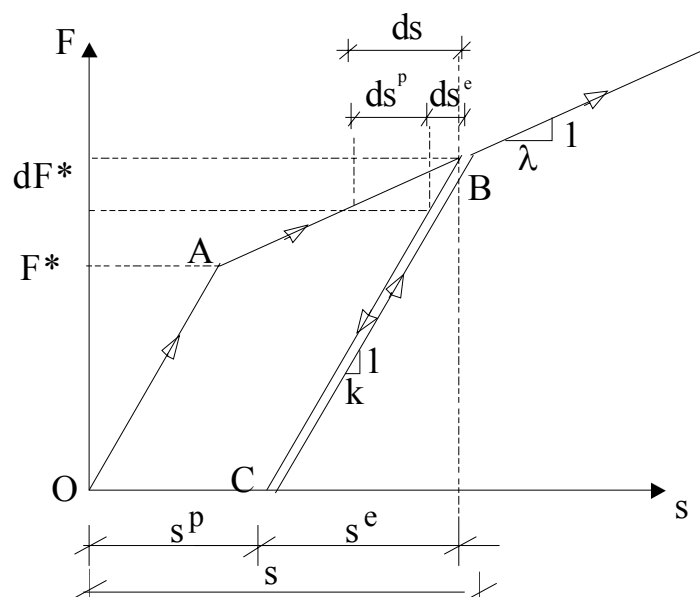


Figura 5.11 – Comportamento di un mezzo elasto-plastico incrudente