

Claudio Borri
Luca Salvatori

MECCANICA COMPUTAZIONALE

Capitolo 1 Introduzione

Rev. 21 aprile 2008



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 1/28



Argomenti trattati nel capitolo 1

- Esempi di problemi strutturali complessi
- Limiti degli approcci classici
- Definizione di meccanica computazionale
- Argomenti del corso
- Introduzione al metodo degli elementi finiti (FEM)



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 2/28



Bibliografia di base

- **Borri C. & Krätzig W. B.** (2000): *Meccanica computazionale delle strutture: dispense del corso.*
- **Bathe K. J.** (1982): *Finite element procedures in engineering analysis.*
- **Corradi Dell'Acqua L.** (1993): *Le teorie strutturali ed il metodo degli elementi finiti.*
- **Zienkiewicz O. C. & Taylor R. L.** (1977): *The finite element method.*
- **Przemieniecki J. S.** (1968): *Theory of matrix structural analysis.*
- **Felippa C.** (2003): *Introduction to Finite Element Methods.*



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

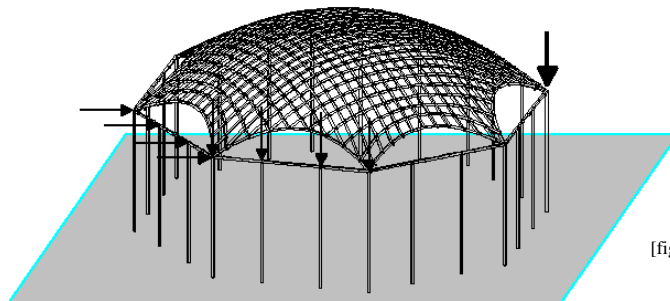
Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 3/28



Esempi di problemi strutturali (1/7)

Struttura spaziale di travi complessa

- analisi statica lineare
- analisi statica geometricamente non-lineare



[figura per gentile concessione
del Prof. W. Zahlten]



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

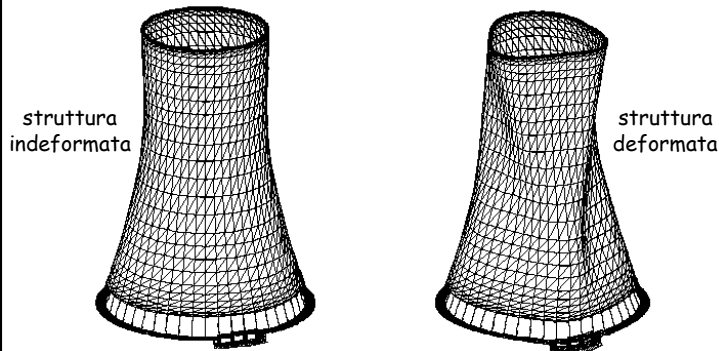
Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 4/28



Esempi di problemi strutturali (2/7)

Torre di raffreddamento per centrali energetiche

- analisi statica lineare
- analisi statica geometricamente non-lineare



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

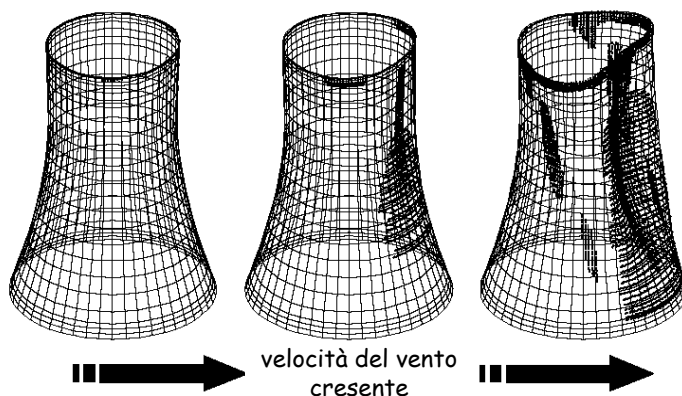
Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 5/28



Esempi di problemi strutturali (3/7)

Fessurazione del CLS in torre di raffreddamento per centrali energetiche

- analisi statica fisicamente e geometricamente non-lineare



[figura per gentile concessione
del Prof. W. Zahlten]



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

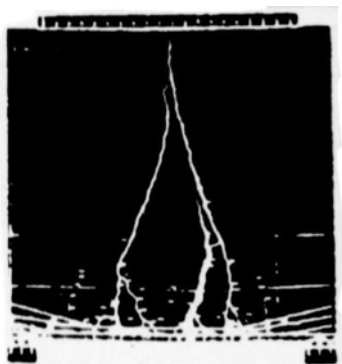
Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 6/28



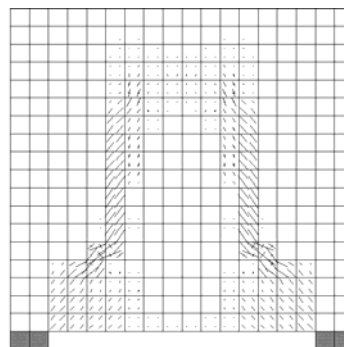
Esempi di problemi strutturali (4/7)

Simulazione delle fessure in pannello in CA

•analisi statica fisicamente non-lineare



fessure sperimentali



fessure numeriche



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

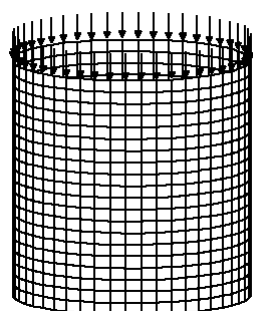
Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 7/28



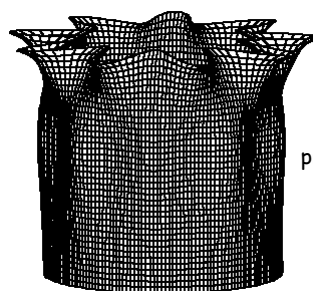
Esempi di problemi strutturali (5/7)

Serbatoio cilindrico con carico assiale

•analisi di stabilità



struttura
indeformata



prima forma di
instabilità

[figura per gentile concessione
del Prof. W. Zahlten]



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

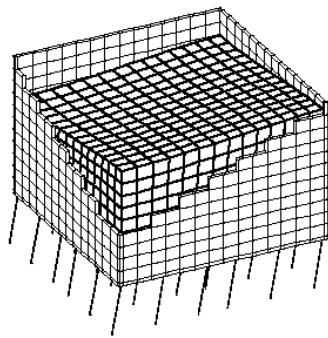
Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 8/28



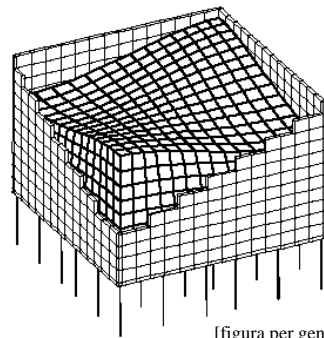
Esempi di problemi strutturali (6/7)

Serbatoio quadrato con modellazione del fluido

•analisi dinamica modale



1° modo di vibrare



3° modo di vibrare

[figura per gentile concessione del Dott. M. Brüggemann]



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

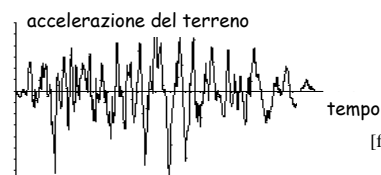
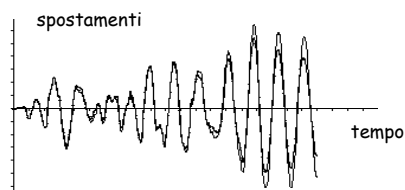
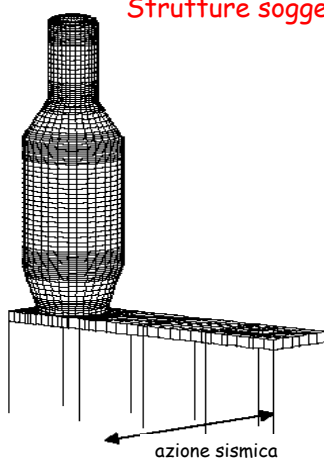
Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 9/28



Esempi di problemi strutturali (7/7)

Strutture soggette all'azione sismica

•analisi dinamica ad integrazione nel tempo



[figura per gentile concessione del Prof. W. Zahlten]



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 10/28



Problemi dell'ingegneria strutturale

Tipi di struttura:

- bielle
- cavi
- telai
- archi
- lastre
- piastre
- gusci
- continui
- ...

Tipo di problema meccanico:

- statica lineare
- statica non-lineare
- stabilità
- dinamica modale
- dinamica nel tempo
- ...

Ogni combinazione è possibile!

Necessità di un metodo generale,
come vedremo il metodo degli elementi finiti risponde a questo requisito.



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 11/28



Approcci classici ("manuali")

Metodo delle forze (forze generalizzate incognite):

- equazioni di Müller-Breslau (congruenza)

limitato a strutture con un numero limitato di "gradi di iperstaticità"

Metodo degli spostamenti (spostamenti generalizzati incogniti)

- equazioni di equilibrio (metodi diretti, metodo delle sottostrutture, ecc.)
- metodi iterativi (Cross, ecc.)

limitati a telai piani

I metodi classici "manuali" sono limitati a casi semplici o semplificati e non presentano un modo semplice di essere automatizzati.



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 12/28



Soluzione computazionale

- I calcolatori elettronici offrono "nuove" possibilità di calcolo: nasce la Meccanica Computazionale
- Necessità di ricondurre il problema ad un numero finito di gradi di libertà (discretizzazione) in modo da consentirne la formulazione algebrica e l'utilizzo della notazione matriciale.
- Necessità di sviluppare una procedura ripetitiva che possa venir tradotta in algoritmi e dunque in software.

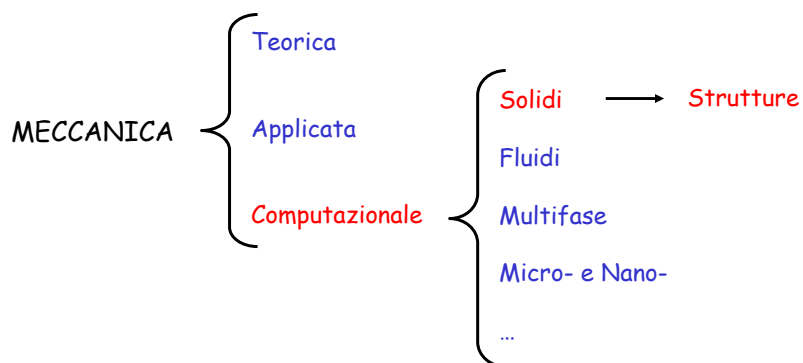


Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 13/28



Meccanica computazionale delle strutture



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 14/28



Metodi di discretizzazione spaziale

Il problema della meccanica dei continui solidi (e delle strutture in particolare), per essere risolto con l'ausilio del computer, necessita di essere discretizzato nello spazio. Si passa da grandezze continue a grandezze definite in un numero finito di punti, da equazioni differenziali a equazioni algebriche che possono trovare rappresentazione matriciale.

Metodi di discretizzazione spaziale

- Differenze finite (FDM)
- Elementi finiti (FEM)
- Elementi al contorno (BEM)
- Volumi finiti (FVM)
- Mesh-free
- ...



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 15/28



Classificazione dei problemi strutturali

Considerando o meno l'inerzia: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Statica} \\ \text{Dinamica} \end{array} \right.$

Accettando o meno l'approssimazione lineare: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Lineare} \\ \text{Non-lineare} \end{array} \right.$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 16/28



Differenti approcci al FEM

Metodo delle forze (o della congruenza, o della flessibilità)

scelta delle
incognite

equazioni
risolutive

matrici
utilizzate

Metodo degli spostamenti (o dell'equilibrio, o della rigidità)

L'approccio agli spostamenti è quello adottato
nella maggioranza dei programmi (commerciali e
accademici): ci occupiamo di quello!



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 17/28



Oggetto del corso

Obiettivo principale:

statica lineare con il metodo degli elementi finiti:
approccio agli spostamenti

Obbiettivi secondari:

cenni di metodi non-lineari

cenni di stabilità



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 18/28



Metodo degli Elementi Finiti

Interpretazione fisica

L'intera struttura è troppo complessa per essere studiata: la si scompone in "elementi" semplici (belle, aste, superfici e volumi) ed il comportamento complessivo è ottenuto tramite "assemblaggio" (reinterpretiamo il *divide et impera!*). ➡ Capitolo 2

Interpretazione matematica

Le grandezze incognite (che sono campi, funzione della posizione) vengono considerate solo in un numero finito di punti (nodi). I valori nei punti intermedi si ottengono tramite funzioni interpolanti (funzioni di forma), definite all'interno degli "elementi" in cui la struttura risulta suddivisa. Le equazioni differenziali che caratterizzano il problema vengono così riscritte in forma algebrica e risolte con metodi matriciali. ➡ Capitolo 3



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 19/28



Passi del metodo

1. Decomposizione della struttura continua in elementi (discretizzazione).
2. Definizione delle incognite (e.g. spostamenti) solo in un numero finito di punti (nodi).
3. Interpolazione dei valori nodali a livello di elemento (approssimazione tramite le funzioni di forma).
4. Assemblaggio degli elementi nella struttura intera.
5. Soluzione del sistema di equazioni nelle variabili primarie (e.g. spostamenti).
6. Calcolo delle variabili secondarie a livello di elemento.

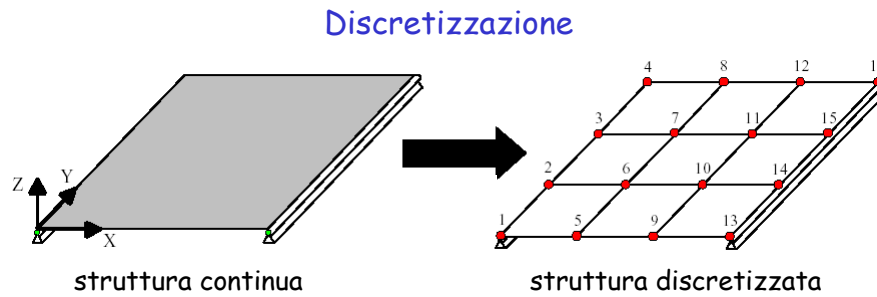


Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 20/28



Passo 1: suddivisione della struttura continua in elementi connessi fra loro nei nodi



[figure per gentile concessione del Prof. W. Zuhlten]

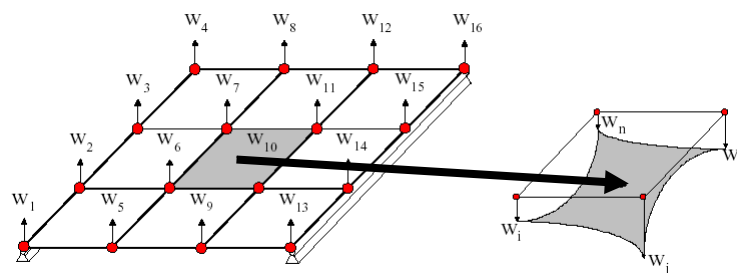


Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 21/28



Passo 2: definizione delle grandezze incognite solo nei nodi



- Nella struttura continua gli spostamenti incogniti sono funzioni della posizione (infinito numero di valori).
- Nella struttura discretizzata gli spostamenti incogniti sono un numero finito (quelli nei punti nodali).

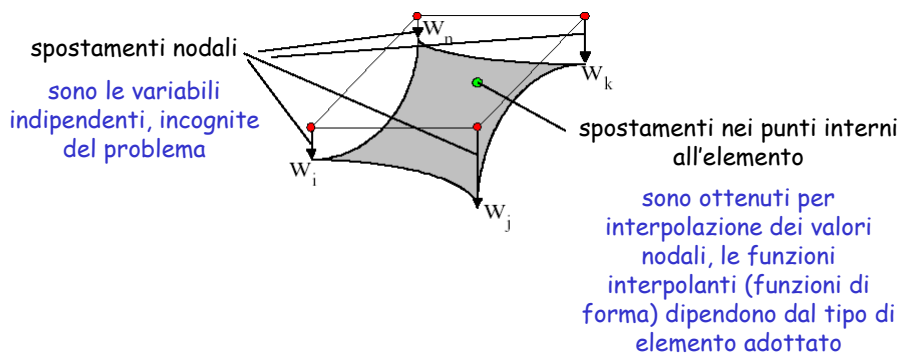


Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 22/28



Passo 3: interpolazione dei valori nodali a livello di elemento

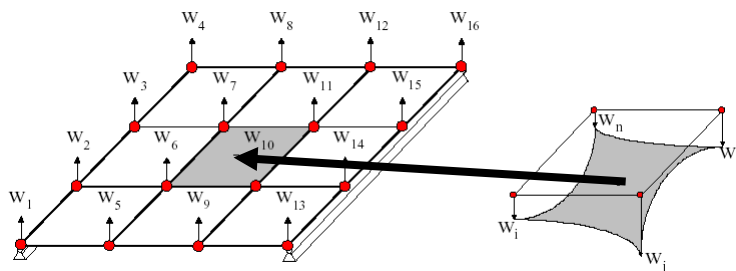


Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 23/28



Passo 4: ricostruzione della struttura globale tramite *assemblaggio* degli elementi



Si ottiene un sistema di equazioni di cui incognite sono gli spostamenti nodali.



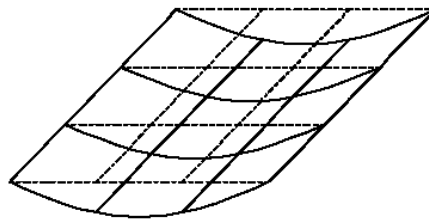
Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 24/28



Passo 5: *soluzione* della struttura nelle variabili nodali incognite

- Risolvendo il sistema si ottengono le incognite nodali
- Tramite le funzioni di interpolazione è possibile conoscere i valori (approssimati) degli spostamenti anche negli altri punti



deformata della struttura
soggetta a peso proprio



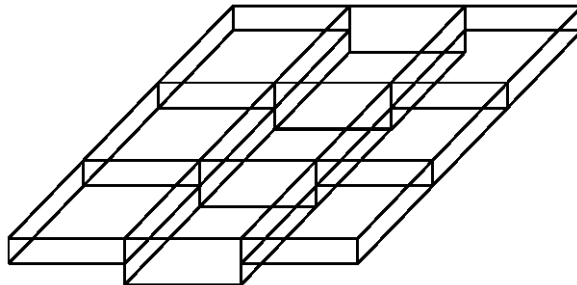
Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 25/28



Passo 6: dagli spostamenti nodali si ricavano le grandezze secondarie a livello di elemento

Dai valori degli spostamenti è possibile calcolare a livello di elemento altre quantità secondarie (ma fondamentali per la pratica ingegneristica!) quali caratteristiche di deformazione e sollecitazione.



Momento flettente m_{xx} dovuto al peso proprio



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 26/28



Cenni alla storia del FEM

- Evoluzione di metodi di discretizzazione "manuali" come quello di Rayleigh-Ritz e quello di Galerkin per trasformare il problema differenziale in uno algebrico.
- La nascita del metodo può essere fatta risalire al 1903, con la formulazione teorica di Study.
- Sostanziale riutilizzo di concetti teorici di largo utilizzo (metodi dell'equilibrio e della congruenza, notazione matriciale).
- Trova effettiva applicazione pratica solo dopo il 1954, anno in cui IBM sviluppa il FORTRAN, il primo linguaggio di programmazione ad alto livello.



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 27/28



Nel prossimo capitolo

Metodo diretto della rigidezza:
dettaglio dei passaggi (con esempio di struttura)



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 21/04/2008) Capitolo 1: 28/28

