

Claudio Borri
Luca Salvatori

MECCANICA COMPUTAZIONALE

Capitolo 2

Metodo diretto della rigidezza

Rev. 31 maggio 2006



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 1/42



Argomenti trattati nel capitolo 2

- Idealizzazione e discretizzazione
- Rigidezza dell'elemento biella (ricavata per via diretta)
- Trasformazione di coordinate (locali-globali)
- Assemblaggio
- Applicazione delle condizioni al contorno
- Soluzione
- Calcolo variabili secondarie

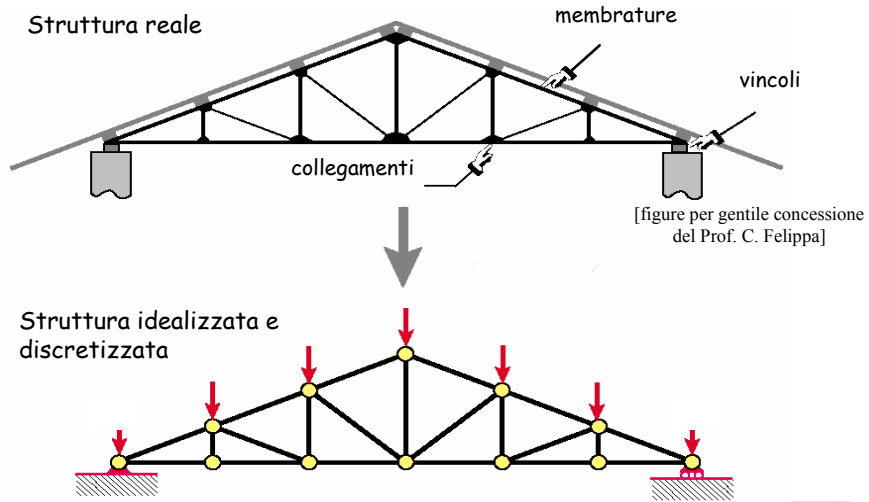


Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 2/42



Idealizzazione e discretizzazione (operata dall'utente)



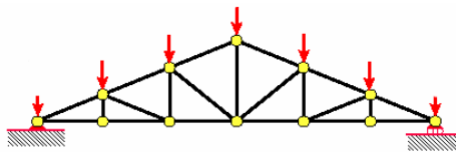
Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 3/42

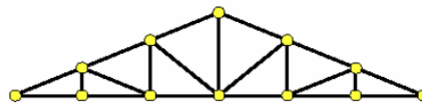


Scomposizione della struttura (teoria del metodo)

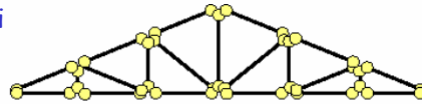
Struttura discretizzata



Rimozione di carichi e vincoli



Scomposizione in singoli elementi



Singolo elemento generico



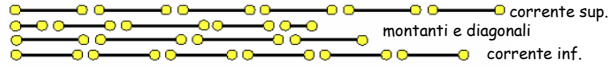
Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 4/42

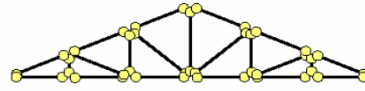


Soluzione della struttura (eseguita dal programma)

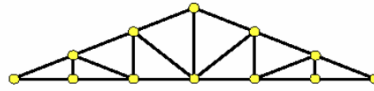
Formazione dei singoli
elementi (in coordinate locali)



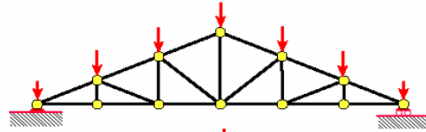
Rappresentazione in
coordinate globali



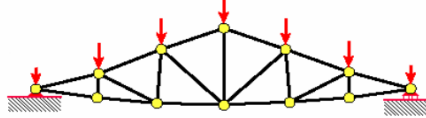
Assemblaggio (ripristino della
congruenza)



Applicazione di vincoli e
carichi



Soluzione



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 5/42



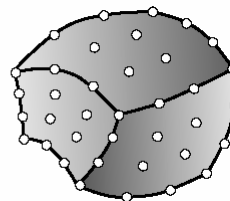
L'approccio del FEM è generale ed è lo stesso per tutti i tipi di elemento



biella 2D

2 nodi

4 GdL



continuo 3D tri-cubico

64 nodi

192 GdL

Vediamo il metodo passo passo utilizzando elementi semplici!

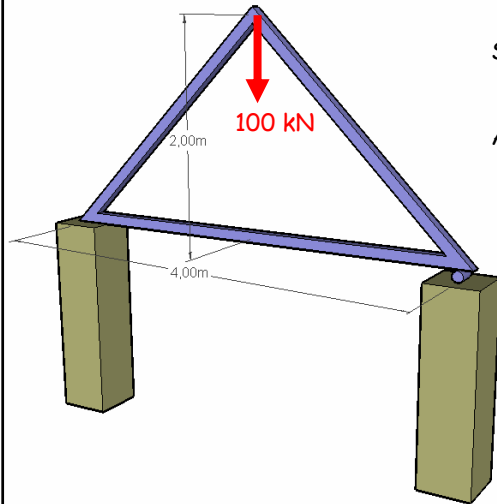


Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 6/42



Struttura "reale"



Sezioni scatolari 0.10 x 0.10 m ($s=5$ mm)
($A = 2.0 \times 10^{-3} \text{ m}^2$)

Acciaio
($E = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$)

$EA = 420 \text{ MN}$

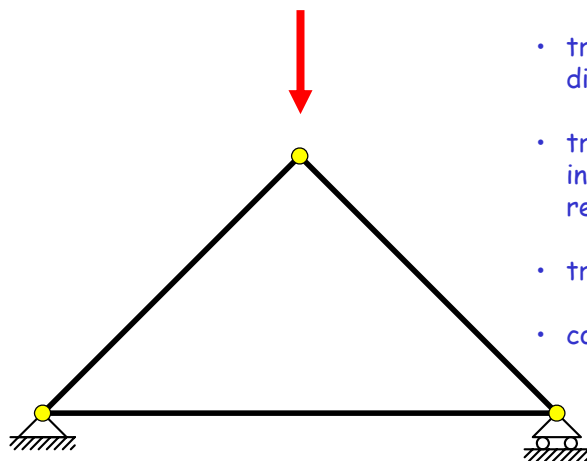


Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 7/42



Modello idealizzato



Ipotizziamo di poter:

- trascurare la terza dimensione
- trascurare i momenti agli incastri (struttura reticolare)
- trascurare il peso proprio
- considerare vincoli ideali



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

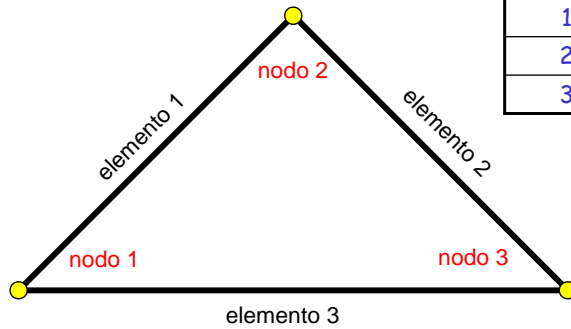
Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 8/42



Numerazione di nodi ed elementi

Tabella di incidenza

| Elemento | Primo nodo | Secondo nodo |
|----------|------------|--------------|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 |

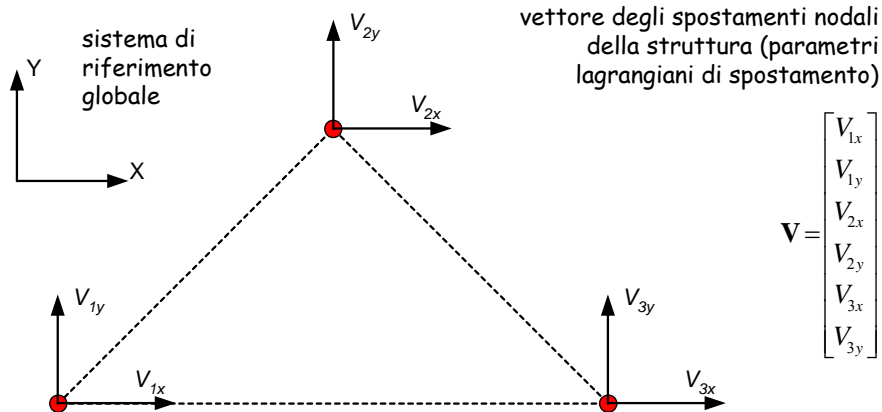


Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 9/42



Definizione di sistema di riferimento globale e dei gradi di libertà nodali della struttura



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 10/42

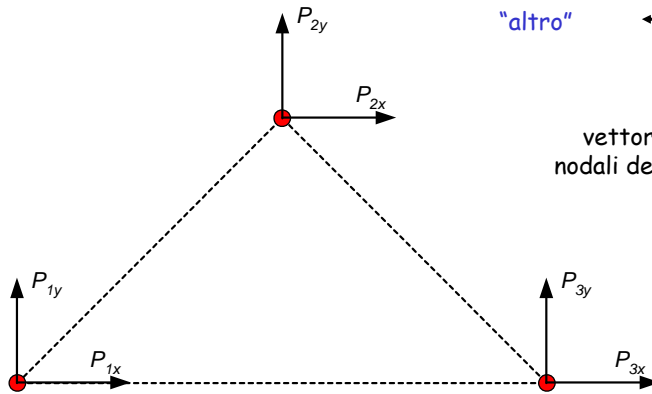


Definizione dei carichi nodali

A ciascun grado di libertà corrisponde un'azione che è quella che compie lavoro con il relativo spostamento generalizzato: **traslazioni** \longleftrightarrow **forze**

rotazioni \longleftrightarrow **momenti**

"altro" \longleftrightarrow **ciò che compie lavoro con "altro"**



vettore dei carichi nodali della struttura

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ P_{3x} \\ P_{3y} \end{bmatrix}$$

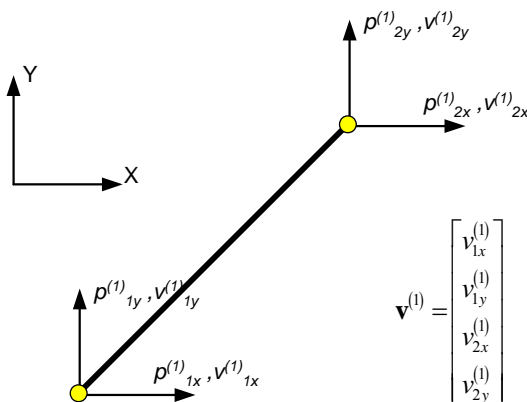


Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 11/42



Singolo elemento in coordinate globali



$$\mathbf{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} v_{1x}^{(1)} \\ v_{1y}^{(1)} \\ v_{2x}^{(1)} \\ v_{2y}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} p_{1x}^{(1)} \\ p_{1y}^{(1)} \\ p_{2x}^{(1)} \\ p_{2y}^{(1)} \end{bmatrix}$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 12/42



Relazione fra carichi e spostamenti a livello di elemento

- Per ogni elemento dobbiamo ricercare una relazione fra carichi e spostamenti.
- Nelle ipotesi di comportamento lineare questa relazione è esprimibile come:

$$\mathbf{p}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)} \cdot \mathbf{v}^{(e)}$$

$$\begin{bmatrix} p_1^{(e)} \\ p_2^{(e)} \\ \vdots \\ p_{n_e}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & \dots & k_{1n_e}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} & \dots & k_{2n_e}^{(e)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n_e1}^{(e)} & k_{n_e2}^{(e)} & \dots & k_{n_en_e}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(e)} \\ v_2^{(e)} \\ \vdots \\ v_{n_e}^{(e)} \end{bmatrix}$$

- Vediamo adesso il caso dell'elemento biella tenendo a mente che per ogni elemento lineare è possibile scrivere una relazione come la precedente e che dunque il procedimento è del tutto generale.

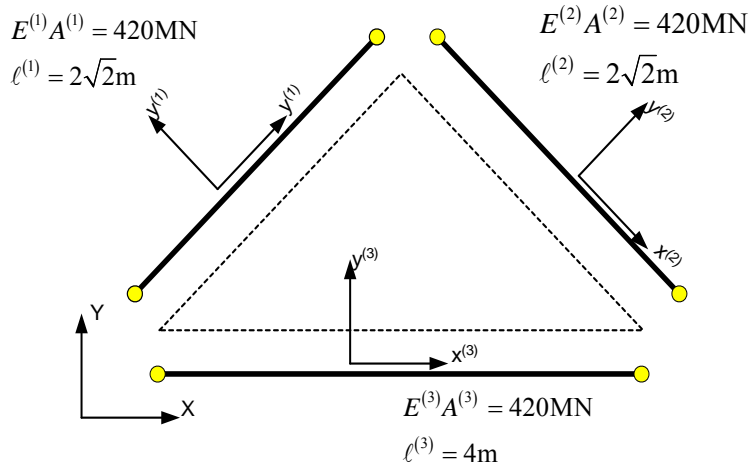


Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 13/42



Proprietà degli elementi e sistemi di riferimento locali

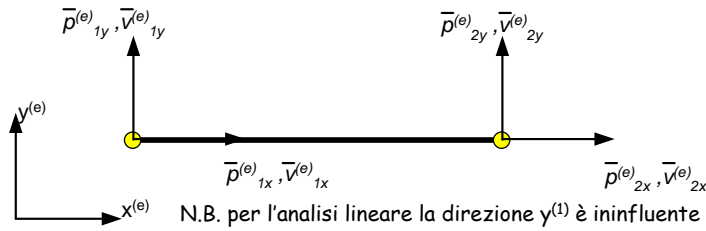


Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 14/42



Rigidezza dell'elemento in coordinate locali



equilibrio $\begin{bmatrix} \bar{p}_{1x}^{(e)} \\ \bar{p}_{2x}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N \\ N \end{bmatrix}$
 legame $N = EA \cdot \varepsilon$
 congruenza $\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\bar{v}_{2x}^{(e)} - \bar{v}_{1x}^{(e)}}{\ell}$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_{1x}^{(e)} \\ \bar{p}_{2x}^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{E^{(e)} A^{(e)}}{\ell^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_{1x}^{(e)} \\ \bar{v}_{2x}^{(e)} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{p}}^{(e)} = \bar{\mathbf{k}}^{(e)} \bar{\mathbf{v}}^{(e)}$$

$\bar{\mathbf{k}}^{(e)}$ matrice di rigidezza dell'elemento in coordinate locali

N.B.: la matrice è simmetrica (non è un caso: vedremo perché nel cap. 3)

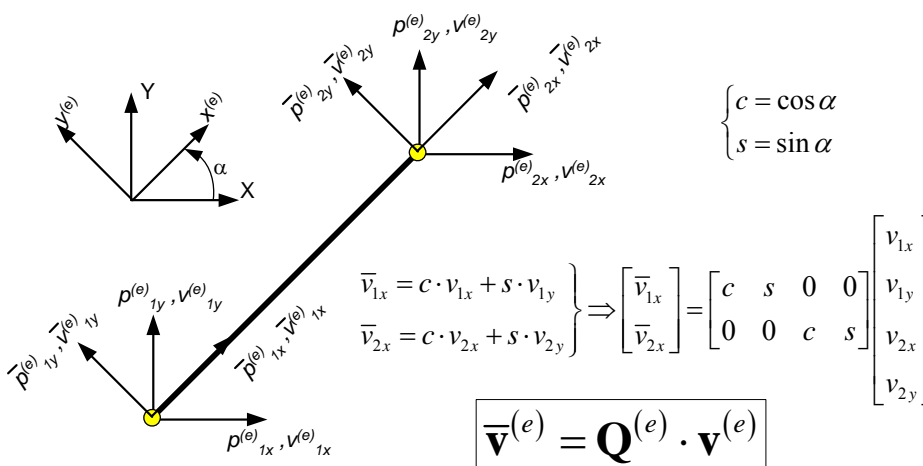


Università degli Studi di Firenze
 Dipartimento di Ingegneria Civile
 Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
 Luca Salvatori
 (rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 15/42



Trasformazione degli spostamenti nodali

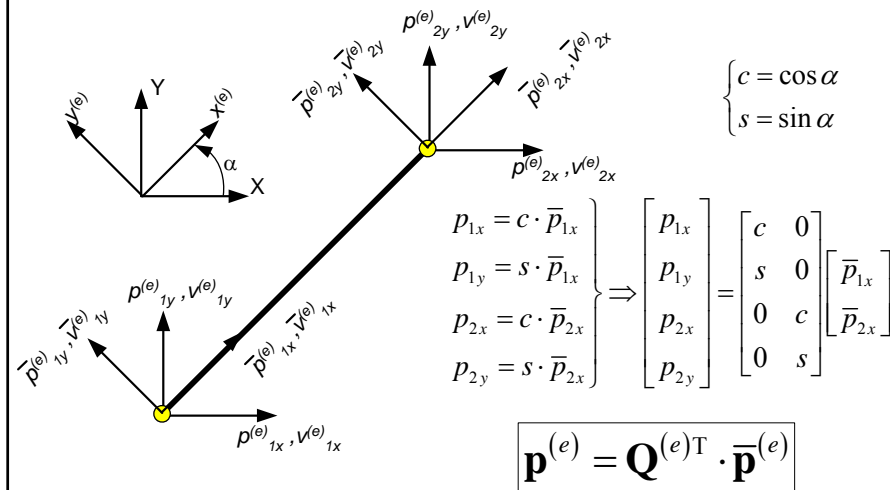


Università degli Studi di Firenze
 Dipartimento di Ingegneria Civile
 Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
 Luca Salvatori
 (rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 16/42



Trasformazione dei carichi nodali



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 17/42



Matrici di trasformazione

Il fatto che le matrici di trasformazione siano una la trasposta dell'altra può essere provato anche con considerazioni energetiche. Il lavoro fatto dai carichi sugli spostamenti nei due sistemi di riferimento deve essere lo stesso (per brevità di notazione si omette l'apice ^(e) in tutte le variabili):

$$\delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{p} = \delta \bar{\mathbf{v}}^T \cdot \bar{\mathbf{p}} \quad (*)$$

Amnesso che:

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}$$

si ha:

$$\delta \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{v}$$

Sostituendo in (*) e tenendo conto che $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$, si ha:

$$\delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{p} = \delta \mathbf{v}^T \cdot (\mathbf{Q}^T \cdot \bar{\mathbf{p}}) \quad \Rightarrow \quad \delta \mathbf{v}^T \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{Q}^T \cdot \bar{\mathbf{p}}) = 0$$

Poiché la precedente deve valere per ogni $\delta \mathbf{v}$, si ottiene:

$$\mathbf{p} = \mathbf{Q}^T \cdot \bar{\mathbf{p}}$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 18/42



Rigidezza dell'elemento in coordinate globali

Trasformazioni di coordinate

$$\mathbf{p}^{(e)} = \mathbf{Q}^{(e)T} \cdot \bar{\mathbf{p}}^{(e)} \quad \bar{\mathbf{v}}^{(e)} = \mathbf{Q}^{(e)} \cdot \mathbf{v}^{(e)}$$

$$\bar{\mathbf{p}}^{(e)} = \bar{\mathbf{k}}^{(e)} \bar{\mathbf{v}}^{(e)} \quad \text{Eq. di rigidezza in coord. locali}$$

$$\mathbf{p}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{v}^{(e)}$$

$$\mathbf{k}^{(e)} = \mathbf{Q}^{(e)T} \cdot \bar{\mathbf{k}}^{(e)} \cdot \mathbf{Q}^{(e)}$$

N.B.: il cambiamento di coordinate conserva la simmetria della matrice

$$\mathbf{k}^{(e)} = \frac{E^{(e)} A^{(e)}}{\ell^{(e)}} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 19/42



Equazioni di rigidezza in coordinate globali

$$\begin{bmatrix} P_{1x}^{(1)} \\ P_{1y}^{(1)} \\ P_{2x}^{(1)} \\ P_{2y}^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{210 \text{ kN}}{\sqrt{2} \text{ mm}} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1x}^{(1)} \\ v_{1y}^{(1)} \\ v_{2x}^{(1)} \\ v_{2y}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{1x}^{(2)} \\ P_{1y}^{(2)} \\ P_{2x}^{(2)} \\ P_{2y}^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{210 \text{ kN}}{\sqrt{2} \text{ mm}} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1x}^{(2)} \\ v_{1y}^{(2)} \\ v_{2x}^{(2)} \\ v_{2y}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{1x}^{(3)} \\ P_{1y}^{(3)} \\ P_{2x}^{(3)} \\ P_{2y}^{(3)} \end{bmatrix} = 105 \frac{\text{kN}}{\text{mm}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1x}^{(3)} \\ v_{1y}^{(3)} \\ v_{2x}^{(3)} \\ v_{2y}^{(3)} \end{bmatrix}$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 20/42



Il FEM è un metodo generale

In seguito vedremo come vengono formulati altri elementi, tenendo a mente che si perviene sempre ad un sistema di equazioni analogo a quello visto per la biella:

$$\begin{bmatrix} p_1^{(e)} \\ p_2^{(e)} \\ \vdots \\ p_{n_e}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & \cdots & k_{1n_e}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} & \cdots & k_{2n_e}^{(e)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n_e1}^{(e)} & k_{n_e2}^{(e)} & \cdots & k_{n_en_e}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(e)} \\ v_2^{(e)} \\ \vdots \\ v_{n_e}^{(e)} \end{bmatrix}$$

Vediamo adesso come ricostituire la struttura originale partendo dalle equazioni dei singoli elementi.

Il procedimento è detto "assemblaggio" e come si è detto è del tutto indipendente dal tipo di elemento utilizzato.



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 21/42



Assemblaggio delle equazioni degli elementi in equazioni della struttura

L'operazione di assemblaggio ha lo scopo di ricostituire la struttura iniziale collegando i singoli elementi.

Le regole dell'assemblaggio sono:

- **Congruenza** degli elementi nei nodi (gli spostamenti in ogni nodo devono essere gli stessi per tutti gli elementi che sono collegati al nodo stesso).
- **Equilibrio** nei nodi (la somma delle forze esercitate da tutti gli elementi che si collegano in un nodo deve eguagliare il carico esterno sul nodo stesso).



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 22/42



Assemblaggio: congruenza

Per la **congruenza**, gli spostamenti di ogni elemento in coordinate globali devono essere uguali agli spostamenti dei corrispondenti nodi della struttura, ciò è esprimibile come:

$$\mathbf{v}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)} \cdot \mathbf{V}$$

A è detta **matrice topologica**, ha tante righe quanti sono i gradi di libertà dell'elemento e tante colonne quanti sono i gradi di libertà della struttura. La j -ma riga contiene tutti 0 ed un solo 1 nella colonna del grado di libertà strutturale corrispondente al j -mo grado di libertà dell'elemento.

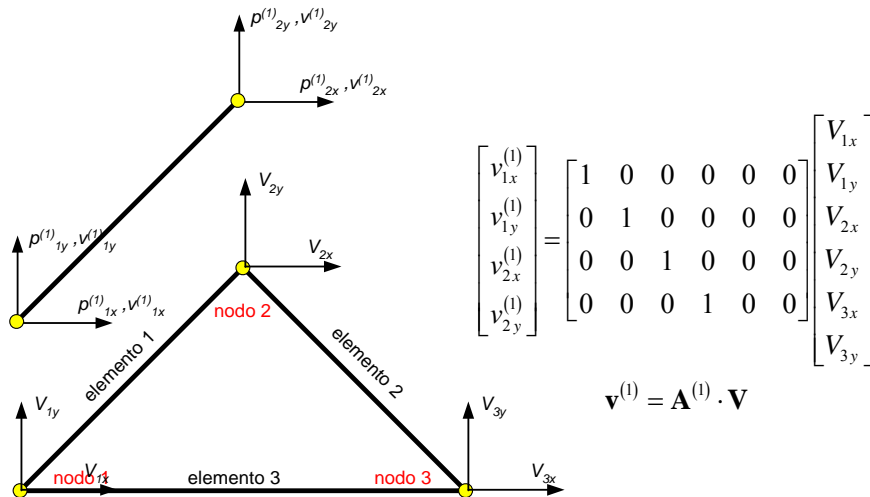


Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 23/42



Assemblaggio: esempio di matrici topologiche

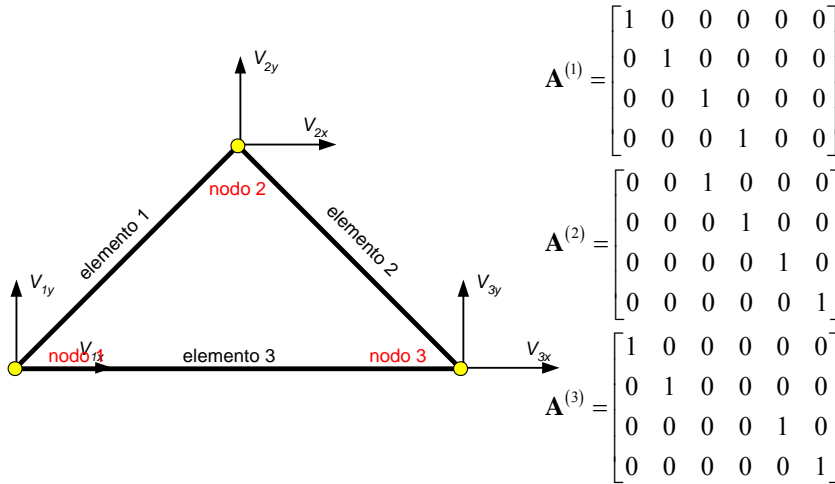


Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 24/42



Assemblaggio: matrici topologiche dell'esempio



$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 25/42



Assemblaggio: equilibrio

Per l'**equilibrio**, in ogni nodo il carico nodale esterno deve eguagliare la somma delle azioni dovute agli elementi che si collegano in quel nodo, è dunque possibile scomporre il carico esterno in una somma di contributi dovuti ai singoli elementi:

$$\mathbf{P} = \sum_{e=1}^{N_{\text{elem}}} \mathbf{P}^{(e)}$$

Con ragionamento energetico analogo a quanto fatto per le matrici di rotazione degli elementi si ha:

$$\delta \mathbf{V}^{(e)T} \cdot \mathbf{P}^{(e)} = \delta \mathbf{v}^{(e)T} \cdot \mathbf{p}^{(e)} \quad (*)$$

Si è visto che:

$$\mathbf{v}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{A}^{(e)} \cdot \mathbf{V}^{(e)} \quad \Rightarrow \quad \delta \mathbf{v}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)} \cdot \delta \mathbf{V}^{(e)}$$

Sostituendo in (*) si ha:

$$\delta \mathbf{V}^{(e)T} \cdot \mathbf{P}^{(e)} = \delta \mathbf{V}^{(e)T} \cdot \left(\mathbf{A}^{(e)T} \cdot \mathbf{p}^{(e)} \right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)T} \cdot \mathbf{p}^{(e)}$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 26/42



Assemblaggio: rigidzze

Ricapitolando si ha:

- equilibrio della struttura: $\mathbf{P} = \sum_{e=1}^{N_{\text{elem}}} \mathbf{P}^{(e)}$
- relazioni fra grandezze a livello di elemento e a livello di struttura: $\mathbf{P}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)T} \cdot \mathbf{p}^{(e)}$ e $\mathbf{v}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)} \cdot \mathbf{V}$
- equazioni di rigidzza dell'elemento: $\mathbf{p}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{v}^{(e)}$

Sostituendo si ottiene:

$$\mathbf{P} = \left(\sum_{e=1}^{N_{\text{elem}}} \underbrace{\mathbf{A}^{(e)T} \cdot \mathbf{k}^{(e)} \cdot \mathbf{A}^{(e)}}_{\mathbf{K}^{(e)}} \right) \cdot \mathbf{V} = \left(\sum_{e=1}^{N_{\text{elem}}} \mathbf{K}^{(e)} \right) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}$$

N.B.: l'assemblaggio conserva la simmetria:
 \mathbf{K} è simmetrica (vedremo perché nel cap. 3)

\mathbf{K} matrice di rigidzza globale della struttura



Università degli Studi di Firenze
 Dipartimento di Ingegneria Civile
 Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
 Luca Salvatori
 (rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 27/42



Equazioni risolutive

(prima dell'imposizione dei vincoli esterni)

Le equazioni del problema sono dunque espresse in forma matriciale dal sistema di equazioni lineari:

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{N_{\text{GdL}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N_{\text{GdL}}} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N_{\text{GdL}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N_{\text{GdL},1}} & K_{N_{\text{GdL},2}} & \cdots & K_{N_{\text{GdL},N_{\text{GdL}}}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{N_{\text{GdL}}} \end{bmatrix}$$

La matrice di rigidzza \mathbf{K} è ottenuta come somma dei contributi delle rigidzze dei singoli elementi riportate a livello di struttura.



Università degli Studi di Firenze
 Dipartimento di Ingegneria Civile
 Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
 Luca Salvatori
 (rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 28/42



Rigidezza degli elementi a livello di struttura

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{210}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{mm}}$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{210}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{mm}}$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = 105 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{mm}}$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 29/42



Rigidezza del sistema

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)} + \mathbf{K}^{(3)} =$$

$$= \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} + k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(1)} + k_{12}^{(3)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{13}^{(3)} & k_{14}^{(3)} \\ k_{21}^{(1)} + k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(3)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{23}^{(3)} & k_{24}^{(3)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} + k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(1)} + k_{34}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} + k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(1)} + k_{44}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} \\ k_{31}^{(3)} & k_{32}^{(3)} & k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} + k_{33}^{(3)} & k_{34}^{(2)} + k_{34}^{(3)} \\ k_{41}^{(3)} & k_{42}^{(3)} & k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} + k_{43}^{(3)} & k_{44}^{(2)} + k_{44}^{(3)} \end{bmatrix} =$$

$$= 105 \begin{bmatrix} 1.7071 & 0.7071 & -0.7071 & -0.7071 & -1.0000 & 0.0000 \\ 0.7071 & 0.7071 & -0.7071 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.7071 & -0.7071 & 1.4142 & 0.0000 & -0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & -0.7071 & 0.0000 & 1.4142 & 0.7071 & -0.7071 \\ -1.0000 & 0.0000 & -0.7071 & 0.7071 & 1.7071 & -0.7071 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & -0.7071 & -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{mm}}$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 30/42



Assemblaggio: procedura operativa

Le matrici topologiche non vengono in pratica utilizzate nei programmi:

- ⊗ Contengono poche informazioni e occupano molta memoria (in un modello con 10,000 GdL la matrice topologica di una biella sarebbe $4 \times 10,000$ contenendo tutti 0.0 e solo 4 valori uguali a 1.0).
- ⊗ Necessitano di pesanti operazioni di moltiplicazione di matrici (e si moltiplica sempre per 0.0 o per 1.0).

Come si osserva dall'esempio è possibile procedere come segue:

- si inizializza la matrice di rigidezza della struttura a zero
- per ogni elemento:
 - si scrive la matrice di rigidezza $k^{(e)}$ in coordinate globali
 - ogni valore $k_{ij}^{(e)}$ della matrice di rigidezza dell'elemento viene sommato alla rigidezza della struttura nella corrispondente posizione (ricavabile dalla tavola di incidenza dei nodi)



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 31/42



Assemblaggio: esempio operativo (elemento 1)

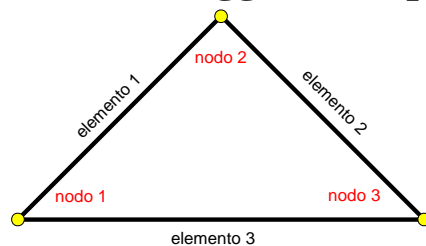
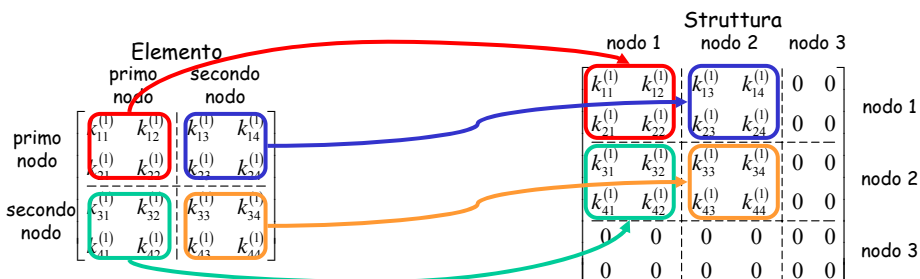


Tabella di incidenza

| Elemento | Primo nodo | Secondo nodo |
|----------|------------|--------------|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 |



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 32/42



Assemblaggio: esempio operativo (elemento 2)

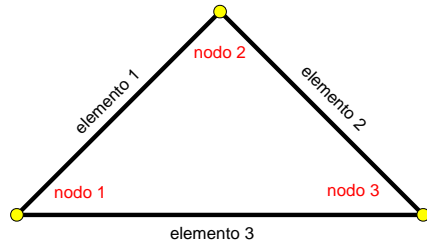


Tabella di incidenza

| Elemento | Primo nodo | Secondo nodo |
|----------|------------|--------------|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 |

Elemento

| | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $k_{11}^{(2)}$ | $k_{12}^{(2)}$ | $k_{13}^{(2)}$ | $k_{14}^{(2)}$ |
| $k_{21}^{(2)}$ | $k_{22}^{(2)}$ | $k_{23}^{(2)}$ | $k_{24}^{(2)}$ |
| $k_{31}^{(2)}$ | $k_{32}^{(2)}$ | $k_{33}^{(2)}$ | $k_{34}^{(2)}$ |
| $k_{41}^{(2)}$ | $k_{42}^{(2)}$ | $k_{43}^{(2)}$ | $k_{44}^{(2)}$ |

Struttura

| | | | | | |
|----------------|----------------|-------------------------------|-------------------------------|----------------|----------------|
| $k_{11}^{(1)}$ | $k_{12}^{(1)}$ | $k_{13}^{(1)}$ | $k_{14}^{(1)}$ | 0 | 0 |
| $k_{21}^{(1)}$ | $k_{22}^{(1)}$ | $k_{23}^{(1)}$ | $k_{24}^{(1)}$ | 0 | 0 |
| $k_{31}^{(1)}$ | $k_{32}^{(1)}$ | $k_{33}^{(1)} + k_{33}^{(2)}$ | $k_{34}^{(1)} + k_{34}^{(2)}$ | $k_{33}^{(2)}$ | $k_{34}^{(2)}$ |
| $k_{41}^{(1)}$ | $k_{42}^{(1)}$ | $k_{43}^{(1)} + k_{43}^{(2)}$ | $k_{44}^{(1)} + k_{44}^{(2)}$ | $k_{43}^{(2)}$ | $k_{44}^{(2)}$ |
| 0 | 0 | $k_{31}^{(2)}$ | $k_{32}^{(2)}$ | $k_{33}^{(2)}$ | $k_{34}^{(2)}$ |
| 0 | 0 | $k_{41}^{(2)}$ | $k_{42}^{(2)}$ | $k_{43}^{(2)}$ | $k_{44}^{(2)}$ |



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 33/42



Assemblaggio: esempio operativo (elemento 3)

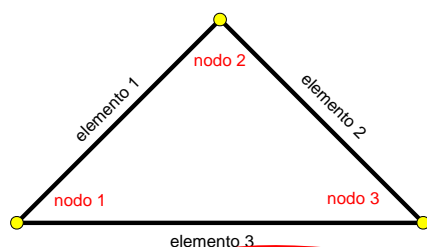


Tabella di incidenza

| Elemento | Primo nodo | Secondo nodo |
|----------|------------|--------------|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 |

Elemento

| | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $k_{11}^{(3)}$ | $k_{12}^{(3)}$ | $k_{13}^{(3)}$ | $k_{14}^{(3)}$ |
| $k_{21}^{(3)}$ | $k_{22}^{(3)}$ | $k_{23}^{(3)}$ | $k_{24}^{(3)}$ |
| $k_{31}^{(3)}$ | $k_{32}^{(3)}$ | $k_{33}^{(3)}$ | $k_{34}^{(3)}$ |
| $k_{41}^{(3)}$ | $k_{42}^{(3)}$ | $k_{43}^{(3)}$ | $k_{44}^{(3)}$ |

Struttura

| | | | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| $k_{11}^{(1)} + k_{11}^{(3)}$ | $k_{12}^{(1)} + k_{12}^{(3)}$ | $k_{13}^{(1)}$ | $k_{14}^{(1)}$ | $k_{13}^{(3)}$ | $k_{14}^{(3)}$ |
| $k_{21}^{(1)} + k_{21}^{(3)}$ | $k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(3)}$ | $k_{23}^{(1)}$ | $k_{24}^{(1)}$ | $k_{23}^{(3)}$ | $k_{24}^{(3)}$ |
| $k_{31}^{(1)}$ | $k_{32}^{(1)}$ | $k_{33}^{(1)} + k_{33}^{(2)}$ | $k_{34}^{(1)} + k_{34}^{(2)}$ | $k_{33}^{(2)}$ | $k_{34}^{(2)}$ |
| $k_{41}^{(1)}$ | $k_{42}^{(1)}$ | $k_{43}^{(1)} + k_{43}^{(2)}$ | $k_{44}^{(1)} + k_{44}^{(2)}$ | $k_{43}^{(2)}$ | $k_{44}^{(2)}$ |
| $k_{31}^{(2)}$ | $k_{32}^{(2)}$ | $k_{31}^{(2)}$ | $k_{32}^{(2)}$ | $k_{33}^{(2)} + k_{33}^{(3)}$ | $k_{34}^{(2)} + k_{34}^{(3)}$ |
| $k_{41}^{(2)}$ | $k_{42}^{(2)}$ | $k_{41}^{(2)}$ | $k_{42}^{(2)}$ | $k_{43}^{(2)} + k_{43}^{(3)}$ | $k_{44}^{(2)} + k_{44}^{(3)}$ |



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 34/42



Applicazione dei vincoli esterni (1/2)

Si è giunti a scrivere le equazioni risolutive nella forma:

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}$$

È possibile dividere i GdL della struttura in due gruppi:

- 1) GdL il cui valore è incognito. Ad essi corrispondono carichi nodali assegnati.
- 2) GdL il cui valore è assegnato (nullo nel caso di vincoli perfetti, non nullo nel caso di cedimenti vincolari imposti). Ad essi corrispondono reazioni vincolari incognite.



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 35/42



Applicazione dei vincoli esterni (2/2)

Immaginiamo di riordinare i GdL e di raccogliere nei vettori \mathbf{V}_1 e $\hat{\mathbf{P}}_1$ gli spostamenti liberi e i corrispondenti carichi noti (entrambi di N_{lib} componenti), nei vettori $\hat{\mathbf{V}}_2$ e \mathbf{P}_2 gli spostamenti imposti e le corrispondenti reazioni vincolari incognite (entrambi di $N_{GdL} - N_{lib}$). Il cappuccio indica le quantità note. Il sistema diviene:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \hat{\mathbf{V}}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{K}_{11} \cdot \mathbf{V}_1 + \mathbf{K}_{12} \cdot \hat{\mathbf{V}}_2 & (*) \\ \mathbf{P}_2 = \mathbf{K}_{21} \cdot \mathbf{V}_1 + \mathbf{K}_{22} \cdot \hat{\mathbf{V}}_2 & (**) \end{cases}$$

Dalla (*) è possibile ricavare gli spostamenti incogniti:

$$\mathbf{V}_1 = (\mathbf{K}_{11})^{-1} \cdot (\hat{\mathbf{P}}_1 - \mathbf{K}_{12} \cdot \hat{\mathbf{V}}_2)$$

Sostituendo nella (**) si ottengono le reazioni vincolari incognite.

**N.B.: La matrice \mathbf{K}_{11} deve essere non singolare.
Ciò accade se la struttura è labile!**



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 36/42



Soluzione

Si è dunque giunti alla soluzione del problema negli spostamenti:

$$\mathbf{V}_1 = (\mathbf{K}_{11})^{-1} \cdot (\hat{\mathbf{P}}_1 - \mathbf{K}_{12} \cdot \hat{\mathbf{V}}_2)$$

Nella pratica la matrice di rigidità non viene invertita esplicitamente.

Il sistema lineare:

$$\mathbf{K}_{11} \cdot \mathbf{V}_1 = \hat{\mathbf{P}}_1 - \mathbf{K}_{12} \cdot \hat{\mathbf{V}}_2$$

viene risolto con algoritmi specifici per sistemi simmetrici come la fattorizzazione di Cholesky o metodi iterativi.

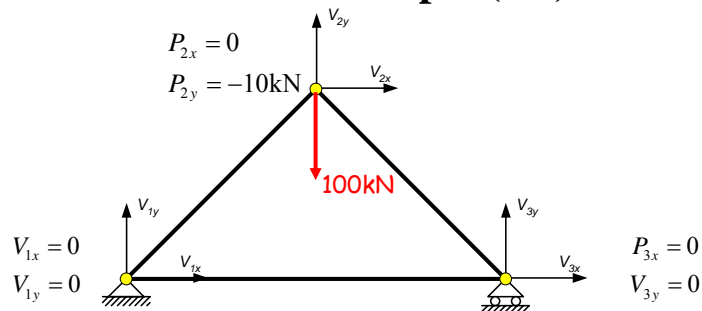


Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 37/42



Soluzione dell'esempio (1/2)



$$\begin{bmatrix} P_{1,x} \\ P_{1,y} \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ P_{3,y} \end{bmatrix} (\text{kN}) = 105 \left(\frac{\text{kN}}{\text{mm}} \right) \begin{bmatrix} 1.7071 & 0.7071 & -0.7071 & -0.7071 & -1.0000 & 0.0000 \\ 0.7071 & 0.7071 & -0.7071 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.7071 & -0.7071 & 1.4142 & 0.0000 & -0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & -0.7071 & 0.0000 & 1.4142 & 0.7071 & -0.7071 \\ -1.0000 & 0.0000 & -0.7071 & 0.7071 & 1.7071 & -0.7071 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & -0.7071 & -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2,x} \\ V_{2,y} \\ V_{3,x} \\ 0 \end{bmatrix}$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

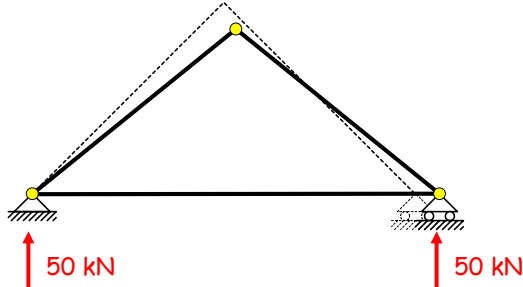
Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 38/42



Soluzione dell'esempio (2/2)

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{3x} \end{bmatrix} = (\mathbf{K}_{11})^{-1} \cdot (\hat{\mathbf{P}}_1 - \mathbf{K}_{12} \cdot \hat{\mathbf{V}}_2) = 105 \begin{bmatrix} 1.4142 & 0.0000 & -0.7071 \\ 0.0000 & 1.4142 & 0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 & 1.7071 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{bmatrix} - \mathbf{K}_{12} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.2381 \\ -0.9115 \\ 0.4762 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{3y} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{21} \cdot \mathbf{V}_1 + \mathbf{K}_{22} \cdot \hat{\mathbf{V}}_2 = 105 \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 & -1.0000 \\ -0.7071 & -0.7071 & 0.0000 \\ 0.7071 & -0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.2381 \\ -0.9115 \\ 0.4762 \end{bmatrix} + \mathbf{K}_{22} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 50.00 \\ 50.00 \end{bmatrix} \text{ kN}$$



$$\begin{bmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{3x} \\ V_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2381 \\ -0.9115 \\ 0.4762 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ mm}$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 39/42



Calcolo delle variabili secondarie

- Dai valori degli spostamenti della struttura è possibile calcolare gli spostamenti nodali di ciascun elemento.
- Dalla congruenza interna all'elemento si ricavano le caratteristiche di deformazione.
- Dalle equazioni costitutive del singolo elemento si ricavano le caratteristiche di sollecitazione.



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 40/42



Variabili secondarie nell'esempio

Consideriamo per esempio l'elemento 1:

spostamenti globali dell'elemento

$$\begin{bmatrix} v_{1x}^{(1)} \\ v_{1y}^{(1)} \\ v_{2x}^{(1)} \\ v_{2y}^{(1)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2381 \\ -0.9115 \\ 0.4762 \\ 0 \end{bmatrix} \text{mm} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2381 \\ -0.9115 \end{bmatrix} \text{mm}$$

↓

spostamenti locali

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_{1x}^{(1)} \\ \bar{v}_{2x}^{(1)} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2381 \\ -0.9115 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.4761 \end{bmatrix} \text{mm}$$

↓

deformazione assiale

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{\Delta \ell^{(1)}}{\ell^{(1)}} = \frac{\bar{v}_{2x}^{(1)} - \bar{v}_{1x}^{(1)}}{\ell^{(1)}} = \frac{-0.4761 \text{mm}}{2.8284 \text{m}} = -0.1683\%$$

↓

sforzo normale $N^{(1)} = E^{(1)} A^{(1)} \cdot \varepsilon^{(1)} = -70.71 \text{kN}$

Verificabile con un semplicissimo calcolo manuale!



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 41/42



Nel prossimo capitolo

Formulazione analitica degli elementi



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 31/05/2006) Capitolo 2: 42/42

