

*Claudio Borri
Luca Salvatori*

MECCANICA COMPUTAZIONALE

Capitolo 3

Formulazione analitica degli elementi

Rev. 9 marzo 2008



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 1/29



Argomenti trattati nel capitolo 3

- Richiami di elastostatica
- Notazione
- Formulazione discreta
- Criteri di convergenza
- *Patch test*
- Altri metodi per il calcolo della matrice di rigidezza



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 2/29



Problema elastostatico (continuo 3D)

Il problema elastostatico è caratterizzato dai tre gruppi di equazioni definiti in ogni punto del continuo

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Congruenza:} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\
 \text{Legame:} \quad \sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \\
 \text{Equilibrio:} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j = 0
 \end{array} \right\} \text{ in } V$$

Cui si aggiungono le condizioni al contorno:

$$\text{c.c. statiche} \quad \sigma_{ij} n_j = \hat{t}_i \quad \text{su } S_t$$

$$\text{c.c. cinematiche} \quad u_i = \hat{r}_i \quad \text{su } S_r$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 3/29



Notazione computazionale

In meccanica computazionale si è soliti raccogliere spostamenti, deformazioni e sforzi nei vettori:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \hat{t}_1 \\ \hat{t}_2 \\ \hat{t}_3 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \hat{r}_3 \end{bmatrix}$$

Si noti come anche i tensori del secondo ordine di sforzi e deformazione vengano rappresentati in vettori colonna.



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 4/29



Problema in notazione computazionale

congruenza: $\boldsymbol{\varepsilon} = \partial_{\text{cin}} \cdot \mathbf{u}$

legame: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$

equilibrio: $\partial_{\text{sta}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$

c.c. statiche: $\mathbf{R}_{\text{sta}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{t}}$ su S_t

c.c. cinematiche: $\mathbf{R}_{\text{cin}} \cdot \mathbf{u} = \hat{\mathbf{r}}$ su S_r

$$\partial_{\text{sta}}^T = \partial_{\text{cin}} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{\text{sta}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_1 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{\text{cin}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

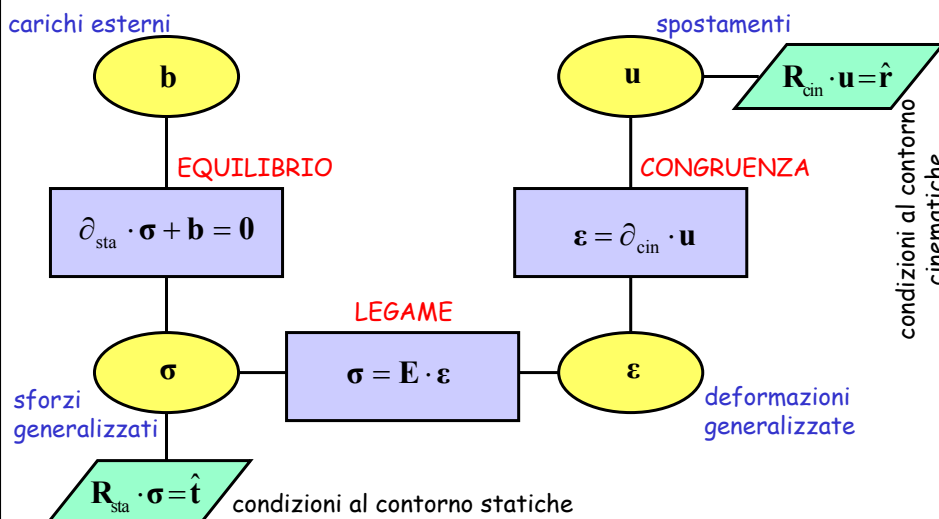


Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 5/29



Diagramma di Tonti



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 6/29

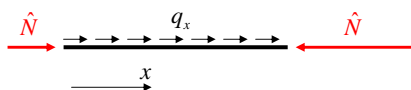


Problema unidimensionale (asta)

È possibile generalizzare la notazione matriciale utilizzando la stessa scrittura per differenti problemi strutturali.

Ad esempio per il caso unidimensionale della biella, i vettori (con una sola componente) sono:

$$\mathbf{b} = [q_x] \quad \boldsymbol{\sigma} = [N] \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x] \quad \mathbf{u} = [u_x] \quad \hat{\mathbf{t}} = [\hat{N}] \quad \hat{\mathbf{r}} = [\hat{u}_x]$$



e le matrici relative sono banalmente:

$$\partial_{\text{sta}}^T = \partial_{\text{cin}} = \left[\frac{d}{dx} \right] \quad \mathbf{E} = [EA] \quad \mathbf{R}_{\text{sta}} = [\pm 1] \quad \mathbf{R}_{\text{cin}} = [\pm 1]$$



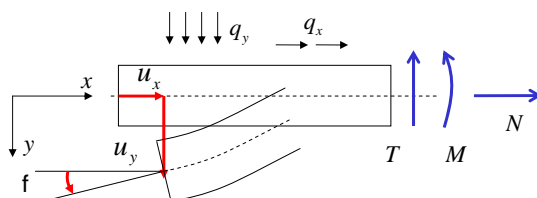
Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 7/29



Trave piana rigida a taglio

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \hat{N} \\ \hat{T} \\ \hat{M} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{\phi} \end{bmatrix}$$



$$\partial_{\text{sta}}^T = \partial_{\text{cin}} = \begin{bmatrix} d_x & 0 \\ 0 & d_x^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = E \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}$$



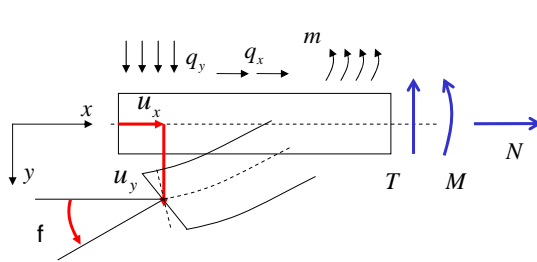
Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 8/29



Trave piana deformabile a taglio

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ m \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ \varphi \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \hat{N} \\ \hat{T} \\ \hat{M} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix}$$



$$\partial_{\text{sta}}^T = \partial_{\text{cin}} = \begin{bmatrix} d_x & 0 & 0 \\ 0 & d_x & 1 \\ 0 & 0 & d_x^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA_y & 0 \\ 0 & 0 & EJ \end{bmatrix}$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

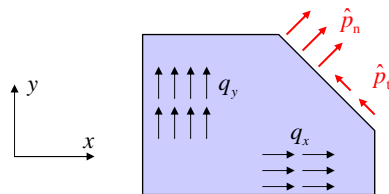
Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 9/29



Problema piano (di tensione)

Per il problema piano di tensione (che verrà meglio analizzato nel cap. 4), si ha:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} n_{xx} \\ n_{yy} \\ n_{xy} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \hat{p}_n \\ \hat{p}_t \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_n \\ \hat{u}_t \end{bmatrix}$$



$$\partial_{\text{sta}}^T = \partial_{\text{cin}} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{\text{sta}} = \begin{bmatrix} \alpha_x^2 & \alpha_y^2 & 2\alpha_x\alpha_y \\ -\alpha_x\alpha_y & \alpha_x^2 - \alpha_y^2 & \alpha_x\alpha_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{\text{cin}} = \begin{bmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ -\alpha_y & \alpha_x \end{bmatrix}$$



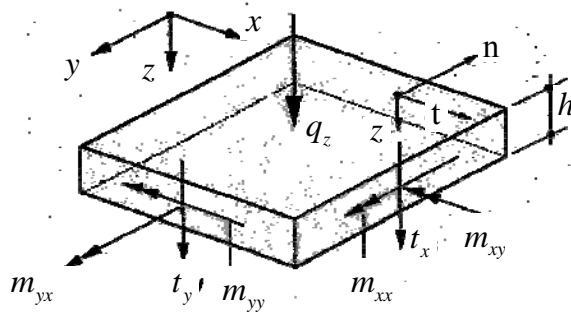
Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 10/29



Piastra (o lastra inflessa) rigida a taglio (teoria di Kirchhoff-Love)

$$\mathbf{b} = [q_z] \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = [u_z] \quad \hat{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \hat{t} \\ \hat{m} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_z \\ \hat{\phi}_t \end{bmatrix}$$



$$\partial_{\text{sta}}^T = \partial_{\text{cin}} = \begin{bmatrix} \partial_{xx} \\ \partial_{yy} \\ 2\partial_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 11/29



Energia potenziale totale

$$\Pi_u^{\text{EPT}} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_u^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_u dV - \int_V \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{b} dV - \int_{S_t} \mathbf{u}^T \cdot \hat{\mathbf{t}} dA$$

Il pedice "u" indica che si tratta di un funzionale in cui la variabile indipendente sono gli spostamenti (deformazioni e tensioni sono assunti in funzione di questi tramite congruenza e legame). Nella formulazione agli spostamenti del FEM è questo il funzionale che utilizzeremo.

È possibile scrivere funzionali analoghi dove le variabili indipendenti sono gli sforzi (metodo delle forze):

- energia potenziale complementare

Per problemi specifici si ricorre inoltre alle formulazioni miste con l'assunzione di più variabili indipendenti:

- potenziale di Hellinger-Reissner (spostamenti e sforzi)
- potenziale di Veubeke-Hu-Washizu (spostamenti, deformazioni e sforzi)



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 12/29



Teorema dei lavori virtuali

- **Spostamento virtuale:** variazione di configurazione arbitraria (virtuale) cinematicamente ammissibile (compatibile con i vincoli).
- **Teorema dei lavori virtuali:** la variazione di energia potenziale totale prodotta da spostamenti virtuali e deformazioni virtuali fra loro congruenti è nulla:

$$\delta \Pi_u^{\text{EPT}} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{b} dV - \int_{S_t} \delta \mathbf{u}^T \cdot \hat{\mathbf{t}} dA = 0$$

se e solo se forze e tensioni sono in equilibrio.

N.B.: Data la sua importanza, si è soliti riferirsi a tale teorema (cioè enunciato dimostrabile!), come "Principio" dei Lavori Virtuali (PLV).

- L'annullarsi della variazione dell'energia potenziale totale è dunque equivalente all'equilibrio e ci si riferisce ad essa come "formulazione integrale dell'equilibrio" (o equilibrio in forma debole). Nel seguito utilizzeremo questa equivalenza:

"PLV" + "congruenza" → "equilibrio"



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 13/29



Discretizzazione degli spostamenti

- 1) All'interno dell'elemento il campo di spostamenti viene approssimato in funzione di un certo numero di parametri scalari a_1, a_2, \dots, a_n raccolti nel vettore \mathbf{a} :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}$$

- 2) I parametri \mathbf{a} (che sono in generale privi di significato fisico immediato, e.g. coefficienti di polinomi) vengono messi in relazione (biunivoca!) con gli spostamenti nodali:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Psi} \cdot \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = \boldsymbol{\Psi}^{-1} \cdot \mathbf{v}$$

- 1+2) Combinando le espressioni precedenti si giunge a scrivere l'interpolazione degli spostamenti:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\Psi}^{-1} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$$

Il campo di spostamenti continuo è ottenuto come prodotto di una matrice di funzioni note per il vettore degli spostamenti nodali.

La matrice $\boldsymbol{\Omega}$ è detta matrice delle **funzioni di forma per gli spostamenti** ed è ottenuta in modo che gli spostamenti valutati in corrispondenza di un nodo $\mathbf{u}(\mathbf{x}_n)$ eguagliano gli spostamenti nodali \mathbf{v}_n .



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 14/29



Discretizzazione della congruenza

Dall'interpolazione degli spostamenti:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$$

Applicando la congruenza si ha:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \partial_{\text{cin}} \cdot (\mathbf{\Omega}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}) = (\partial_{\text{cin}} \cdot \mathbf{\Omega}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$$

La matrice:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \partial_{\text{cin}} \cdot \mathbf{\Omega}(\mathbf{x})$$

contiene le derivate delle funzioni di forma lungo gli spostamenti ed è detta **matrice delle funzioni di forma per le deformazioni**.

L'interpolazione delle deformazioni è dunque:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 15/29



Discretizzazione del legame

Considerando le equazioni di legame:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$$

si ottiene l'interpolazione per gli sforzi:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$$

Talvolta si definisce la matrice:

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x})$$

delle funzioni di forma per gli sforzi.



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 16/29



Discretizzazione del PLV (1/2)

Anziché sfruttare direttamente le equazioni di equilibrio puntuale (forma forte), applichiamo il principio dei lavori virtuali, cioè l'equilibrio in forma integrale (forma debole).

Spostamenti e deformazioni virtuali sono dovuti esclusivamente a spostamenti nodali virtuali (una volta scelte, le funzioni di forma sono fissate).

Consideriamo spostamenti e deformazioni virtuali congruenti (per ipotesi si adottano le stesse funzioni di forma usate per gli spostamenti reali):

$$\begin{cases} \delta \mathbf{u} = \mathbf{\Omega} \cdot \delta \mathbf{v} \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{v} \end{cases}$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 17/29



Discretizzazione del PLV (2/2)

Dal PLV:

$$\delta \Pi_{\text{EPT}}^u = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{b} dV - \int_{S_t} \delta \mathbf{u}^T \cdot \hat{\mathbf{t}} dA = 0$$

sostituendo le quantità discretizzate si ottiene:

$$\int_V \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} dV - \int_V \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{\Omega}(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{b} dV - \int_{S_t} \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{\Omega}(\mathbf{x})^T \cdot \hat{\mathbf{t}} dA = 0$$

portando fuori dagli integrali gli spostamenti nodali (che non dipendono dalla posizione):

$$\delta \mathbf{v}^T \cdot \left[\left(\int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} dV \right) \cdot \mathbf{v} - \int_V \mathbf{\Omega}(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{b} dV - \int_{S_t} \mathbf{\Omega}(\mathbf{x})^T \cdot \hat{\mathbf{t}} dA \right] = 0$$

che conduce alla forma discretizzata del PLV:

$$\delta \mathbf{v}^T \cdot [\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{p}] = 0$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 18/29



Equilibrio discretizzato

Si definiscono dunque la **matrice di rigidezza** dell'elemento:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} dV$$

e il **vettore dei carichi** nodali dell'elemento:

$$\mathbf{p} = \int_V \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{b} dV + \int_{S_t} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x})^T \cdot \hat{\mathbf{t}} dA$$

Dalla forma discretizzata del PLV:

$$\delta \mathbf{v}^T \cdot [\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{p}] = 0$$

tenendo conto dell'arbitrarietà degli spostamenti virtuali, si ottengono le **equazioni di rigidezza**, ovvero l'equilibrio discretizzato:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{p} = \mathbf{0}$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 19/29



Trasformazione di coordinate

Considerando (ove necessario) la trasformazione da coordinate locali a coordinate globali

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}_{\text{glob}}$$

la relazione fra gli spostamenti virtuali nei due sistemi si scrive:

$$\delta \mathbf{v} = \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{v}_{\text{glob}}$$

Sostituendo nel PLV:

$$\delta \mathbf{v}_{\text{glob}} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot [\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}_{\text{glob}} - \mathbf{p}] = 0$$

si ottengono le trasformazioni della matrice di rigidezza e del vettore dei carichi:

$$\mathbf{k}_{\text{glob}} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{p}_{\text{glob}} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{p}$$

e l'espressione delle equazioni di rigidezza dell'elemento in coordinate globali:

$$\mathbf{k}_{\text{glob}} \cdot \mathbf{v}_{\text{glob}} - \mathbf{p}_{\text{glob}} = \mathbf{0}$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 20/29



Altri modi per ricavare la matrice di rigidezza

Ricavare la matrice di rigidezza attraverso la **definizione delle funzioni di forma e l'applicazione di un principio variazionale** (come fatto in questo capitolo con il PLV) è il metodo più generale. Tuttavia vale la pena citare altri metodi **equivalenti** (gli ingredienti di base sono sempre equilibrio, legame e congruenza!):

- Applicando **direttamente** le equazioni di equilibrio, legame e congruenza (come visto per l'elemento biella nel cap. 2).
- Imponendo **spostamenti unitari** per un solo GdL alla volta dell'elemento con tutti gli altri spostamenti nulli (il coefficiente di rigidezza k_{ij} è la reazione correlativa al i -mo GdL quando si imponga il solo spostamento unitario j -mo).
- Sfruttando il primo **teorema di Castigliano**. Le forze nodali sono le derivate dell'energia rispetto agli spostamenti nodali:

$$p_i = \frac{\partial \Pi_{\mathbf{u}}^{\text{EPT}}}{\partial v_i}$$

la rigidezza è a sua volta la derivata delle forze rispetto agli spostamenti:

$$k_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial v_j} = \frac{\partial^2 \Pi_{\mathbf{u}}^{\text{EPT}}}{\partial v_i \partial v_j}$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 21/29



Caratteristiche della matrice di rigidezza

- **Quadrata**: ha tante righe quanti sono i gradi di libertà e tante colonne quanti i carichi nodali, che per definizione sono nello stesso numero.
- **Simmetrica**: lo si può vedere dal teorema di Castigliano applicando il teorema di Schwarz oppure direttamente dalla formula ottenuta con il PLV (considerando la simmetria del tensore di elasticità \mathbf{E}).
- **Semidefinita positiva**: è necessario compiere un lavoro positivo per deformare l'elemento (non è definita strettamente positiva in quanto i movimenti rigidi non provocano deformazioni e dunque compiono lavoro nullo).
- **Ha rango pari al numero di gradi di libertà dell'elemento diminuito dei moti rigidi consentiti**: e.g. per l'elemento biella 1D si ha esattamente un autovalore nullo che corrisponde alla traslazione lungo l'asse della biella stessa (in coordinate globali la biella 2D ha matrice 4x4 e 3 autovalori nulli corrispondenti alle due traslazioni e alla rotazione).

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, k = \frac{EA}{\ell} \rightarrow \det(\mathbf{k} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} k - \lambda & -k \\ -k & k - \lambda \end{bmatrix} = -2k\lambda + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2k \end{cases}$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 22/29



Caso con coazioni (pretensioni, variazioni termiche, etc.)

legame: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)$ (unica equazione modificata)

$$\text{PLV: } \delta \Pi_{\text{EPT}}^u = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{b} dV - \int_{S_t} \delta \mathbf{u}^T \cdot \hat{\mathbf{t}} dA = 0$$

$$\int_V \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} dV - \int_V \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV +$$

$$- \int_V \delta \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{b} dV - \int_{S_t} \delta \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x})^T \cdot \hat{\mathbf{t}} dA = 0$$

$$\delta \mathbf{v}^T \cdot [\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{p}] = 0$$

Le coazioni si traducono dunque in carichi nodali aggiuntivi:

$$\mathbf{p} = \int_V \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{b} dV + \int_{S_t} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x})^T \cdot \hat{\mathbf{t}} dA + \int_V \mathbf{B}(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV$$



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 23/29



Condizioni di convergenza

Affinché un elemento possa essere considerato valido si richiede che all'infittirsi del reticolo di discretizzazione (*mesh*), la soluzione discreta converga alla soluzione del problema continuo. Esistono alcune condizioni sufficienti alla convergenza:

- 1) **Continuità**
- 2) **Completezza**
- 3) **Conformità**
- 4) **Isotropia geometrica**

Se un elemento non rispetta tutti i criteri non è detto che non funzioni in assoluto (sono frequenti ad esempio elementi non conformi), tuttavia tali elementi sono in pratica inutilizzabili se non per scopi specialistici (spesso solo accademici).



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 24/29



Condizioni di convergenza: continuità e completezza

- 1) **Condizione di continuità:** è richiesto che l'interpolazione degli spostamenti sia continua all'interno dell'elemento e differenziabile almeno quanto richiesto dalle equazioni di congruenza.
- 2) **Condizione di completezza:** è richiesto che le funzioni di forma siano in grado di rappresentare, in modo fra loro indipendente, tutti i moti rigidi e gli stati a deformazione costante.
La rappresentazione dei **moti rigidi** con parametri indipendenti, garantisce che un elemento soggetto ad una roto-traslazione pura non vari la propria energia, manifestando così rigidzze spurie a questi moti.
La rappresentazione indipendente degli **stati a deformazione costante** garantisce che, al limite dell'infittimento del reticolo di discretizzazione, il volume di ogni elemento converga all'intorno di un punto materiale.



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 25/29



Condizioni di convergenza: conformità e isotropia geometrica

- 3) **Condizione di conformità:** l'assemblaggio deve ricostituire la continuità di spostamenti e deformazioni all'interfaccia fra gli elementi. Ciò è garantito se e solo se gli spostamenti su un bordo dell'elemento dipendono esclusivamente da quelli dei nodi appartenenti al bordo stesso. In pratica è richiesto che la funzione di forma relativa ad un nodo si annulli su tutti i bordi dell'elemento ai quali il nodo non appartiene.
- 4) **Condizione di isotropia geometrica:** le proprietà dell'elemento non devono dipendere dalla scelta del sistema di riferimento locale, cioè il modello di spostamento deve rimanere inalterato se gli assi vengono ruotati.



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 26/29



Patch test

È un metodo numerico per verificare la validità di un elemento.

- Si definisce una *mesh* di elementi (*patch*, letteralmente "pezza") in modo che si abbia un elemento completamente interno alla *mesh* stessa (oppure un nodo completamente interno, a seconda delle versioni).
- Nei nodi esterni alla *mesh*, si impone un sistema di forze o spostamenti che corrispondono ad uno stato di deformazione costante.
- Si fa girare l'esempio e si verifica che lo stato di deformazione nell'elemento interno sia effettivamente costante e pari a quello atteso (oppure che lo spostamento del nodo interno sia quello atteso).



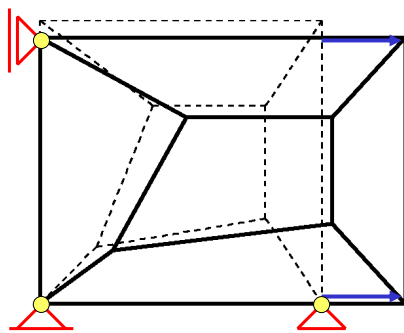
Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 27/29

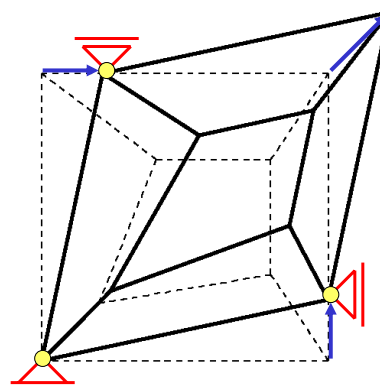


Patch test: esempio

Esempi di stati di deformazione costante ottenuti imponendo gli spostamenti dei nodi esterni della *mesh*. Si verifica quindi lo stato di deformazione nell'elemento interno.



deformazione normale costante



scorrimento costante



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 28/29



Nel prossimo capitolo

Libreria di elementi



Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Ingegneria Civile
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri
Luca Salvatori
(rev. 09/03/2008) Capitolo 3: 29/29

