

*Claudio Borri*  
*Luca Salvatori*

# MECCANICA COMPUTAZIONALE

## Capitolo 6

### Introduzione all'analisi non-lineare

Rev. 12/06/2006



Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri  
Luca Salvatori  
(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 1/25



## Argomenti trattati nel capitolo 6

- Non-linearità fisica e geometrica
- Metodi di analisi
- Procedura incrementale
- Metodi iterativi
- Criteri di convergenza
- Esempio di non-linearità geometrica: biella in formulazione lagrangiana totale
- Esempio di non-linearità fisica: biella con legame elastico non-lineare

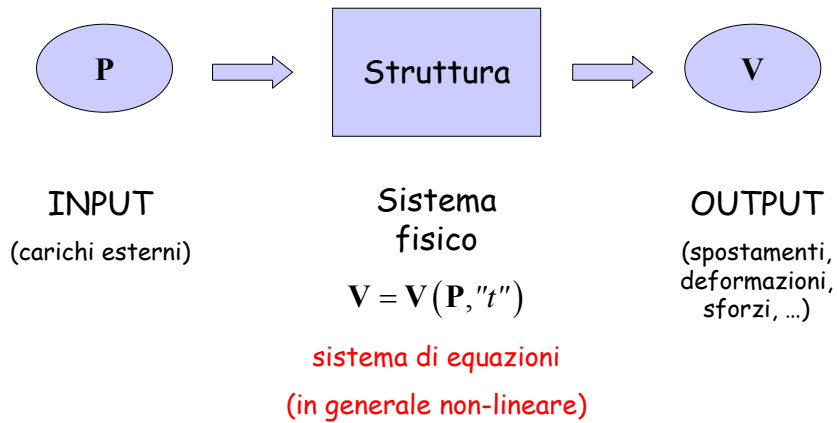


Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri  
Luca Salvatori  
(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 2/25



## Introduzione



Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri  
Luca Salvatori  
(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 3/25



## Caso lineare

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{P}, \cancel{"t"}) = \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{P} \quad \rightarrow \quad \text{sistema di equazioni lineari}$$

☺ **Vantaggi:**

- soluzione con metodi standard
- computazionalmente poco oneroso
- vale il "principio" di sovrapposizione degli effetti (combinazioni di carico, sovrapposizione modale, ...)

☹ **L'approssimazione lineare non è sempre applicabile!**

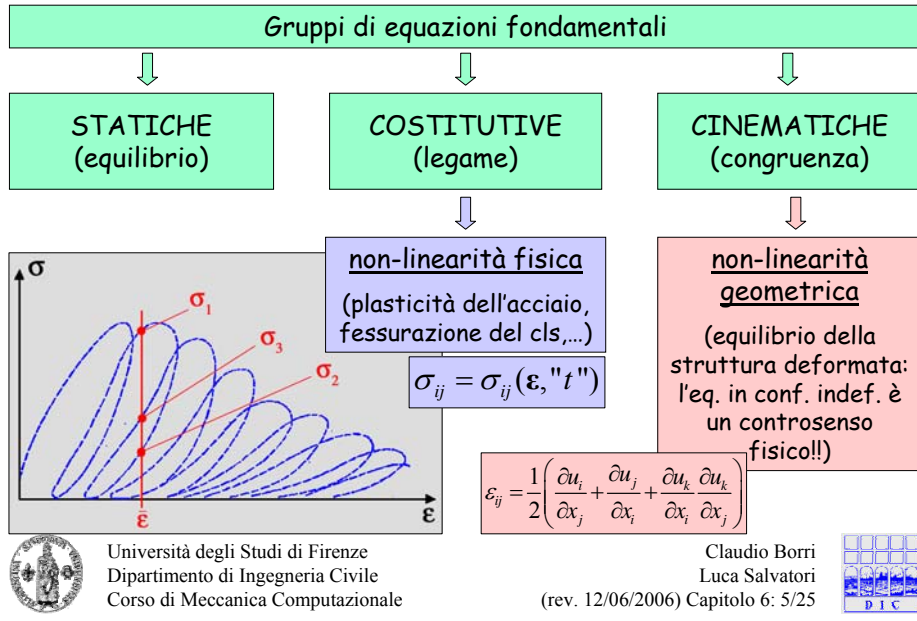


Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri  
Luca Salvatori  
(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 4/25



## Possibili fonti di non-linearità



## Condizione di equilibrio di un sistema discreto e linearizzazione

Immaginiamo di poter scrivere l'equilibrio in forma vettoriale come:

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{V}) = \mathbf{P} \quad \text{condizione di equilibrio}$$

$\mathbf{F}_{\text{int}}$  vettore delle forze interne (dipendente dalla struttura)

$\mathbf{V}$  spostamenti nodali (incogniti)

$\mathbf{P}$  carichi esterni (dati)

Caso lineare:  $\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{V}) = \mathbf{K}_{\text{lin}} \mathbf{V}$

Caso non-lineare: linearizzazione attorno a  $\mathbf{V}_0$  in equilibrio ( $\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{V}_0) = \mathbf{P}_0$ ):

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}) = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{V}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{V}} \right|_{\mathbf{V}_0} \Delta \mathbf{V} + \dots = \mathbf{P}_0 + \Delta \mathbf{P} = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{K}_T \cdot \Delta \mathbf{V} \approx \mathbf{P} - \mathbf{F}_{\text{int}} \quad \text{equilibrio linearizzato}$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{V}_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{V}} \right|_{\mathbf{V}_0} \quad \text{matrice di rigidezza tangente}$$



Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri  
Luca Salvatori  
(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 6/25



## Obbiettivo dell'analisi non-lineare e la procedura incrementale-iterativa

Obbiettivo: tracciare la risposta carico-spostamento della struttura.

Si assume il carico dipendente da un solo parametro scalare  $\lambda$  (moltiplicatore di carico):

$$\mathbf{P} = \lambda \mathbf{P}_{\text{ref}}$$

Come il FEM discretizza la struttura nello spazio, la **procedura incrementale** effettua la discretizzazione del percorso carico-spostamento: dato uno stato in equilibrio definito dalla coppia  $(\mathbf{V}_i, \lambda_i)$  la procedura incrementale stabilisce come si debba ricercare il successivo stato  $(\mathbf{V}_{i+1}, \lambda_{i+1})$ .

Poiché le equazioni di equilibrio sono non-lineari, ogni coppia in equilibrio è ricercata con l'ausilio di un **metodo iterativo**.



Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri  
Luca Salvatori  
(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 7/25



## “Ingredienti”

Procedura incrementale (criterio con cui vengono ricercate le coppie  $(\mathbf{V}, \lambda)$ ):

- Controllo di carico
- Controllo di spostamento
- “A lunghezza d'arco”

Metodo iterativo (metodo con cui si risolvono le equazioni di equilibrio):

- Rigidezza tangente aggiornata (Newton-Raphson o “N-R”)
- Rigidezza tangente non aggiornata (metodi “modificati”)
- Rigidezza elastica (o “rigidezza costante” o “rigidezza lineare”)
- “Rigidezza” secante (quasi-Newton)

Criterio di convergenza (grandezza con cui si misura l'errore e che determina la fine delle iterazioni):

- Norma dei residui
- Norma degli spostamenti
- Norma energetica



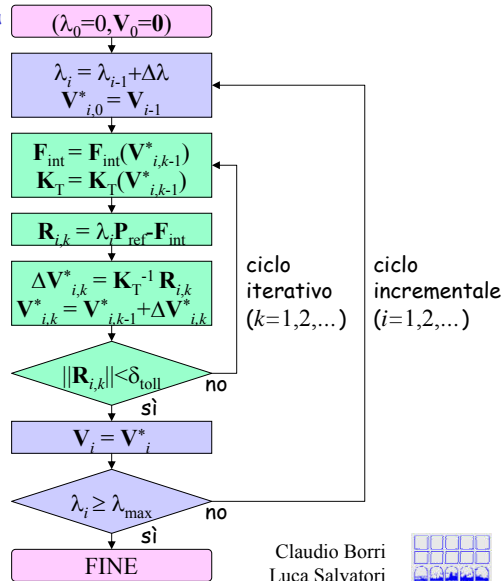
Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri  
Luca Salvatori  
(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 8/25



## Esempio: contr. di carico + N-R + err. ass. residui

Si parte da una posizione di equilibrio nota (e.g. supponendo che la struttura scarica sia in configurazione indeformata). All'inizio di ogni passo incrementale si assume come prima ipotesi per gli spostamenti il valore al passo precedente. Con esso si valutano le forze interne e la rigidezza tangente (metodo di Newton). Si calcola il vettore dei residui. Si calcola la correzione degli spostamenti e il relativo valore aggiornato. Si verifica la bontà dell'approssimazione (in questo esempio con l'errore assoluto misurato sui residui): se non c'è convergenza si continua ad iterare, altrimenti si accetta il valore  $\mathbf{V}_{i,k}^*$  come in equilibrio con il moltiplicatore  $\lambda_i$ . La procedura ha termine quando si raggiunge un valore massimo prestabilito di  $\lambda$ . Il risultato sono le coppie  $(\mathbf{V}_i, \lambda_i)$ .



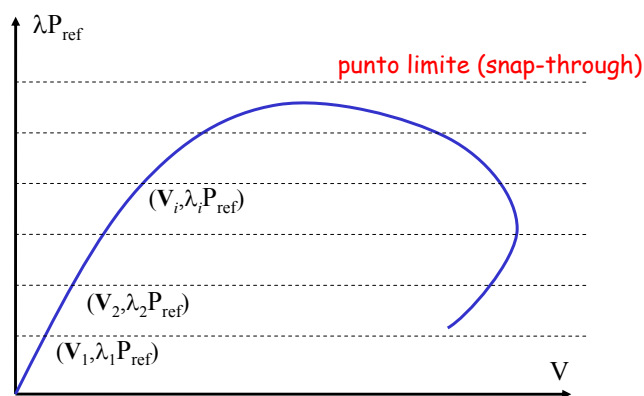
Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri  
Luca Salvatori

(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 9/25



## Procedura incrementale: controllo di carico



- ⊗ corrisponde ad un modo "naturale" di applicare il carico per passi
- ⊗ impossibile seguire il percorso di equilibrio oltre il punti limite



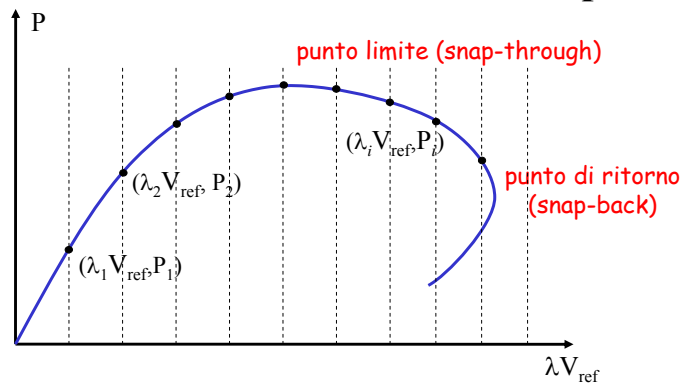
Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri  
Luca Salvatori

(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 10/25



## Procedura incrementale: controllo di spostamento



Il moltiplicatore si applica agli spostamenti e si ricercano i carichi corrispondenti:

- ⊗ tutti gli spostamenti assegnati devono essere fra loro proporzionali, ciò accade solo in pochi modelli fisici (e.g. carichi concentrati in prove sperimentali).
- ⊙ consente di superare i punti limite
- ⊗ ma non i punti di ritorno

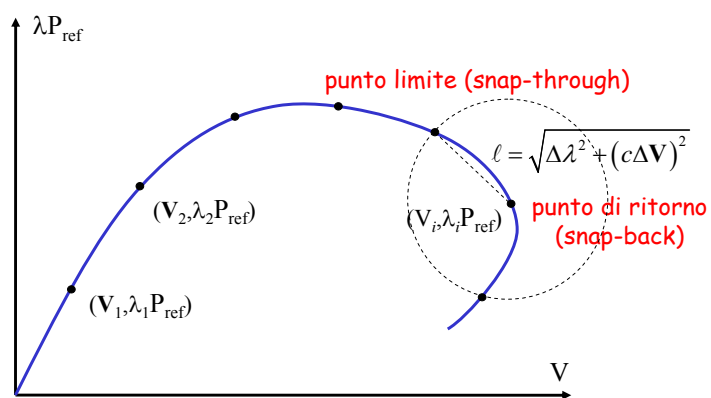


Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri  
Luca Salvatori  
(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 11/25



## Procedura incrementale: “a lunghezza d’arco”



- ⊗ non si ha il controllo né sul carico né sugli spostamenti
- ⊙ è possibile seguire ogni percorso di equilibrio

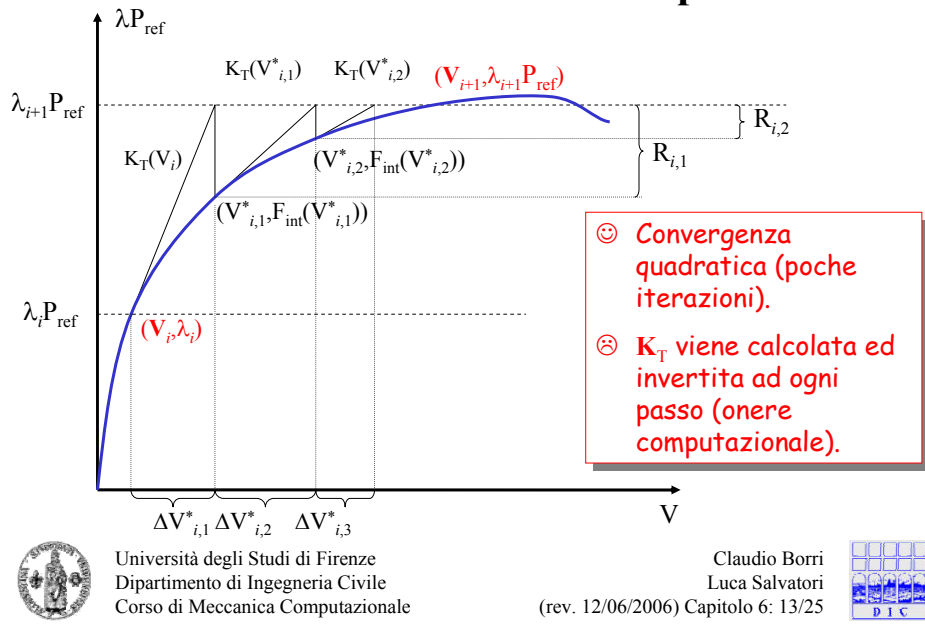


Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

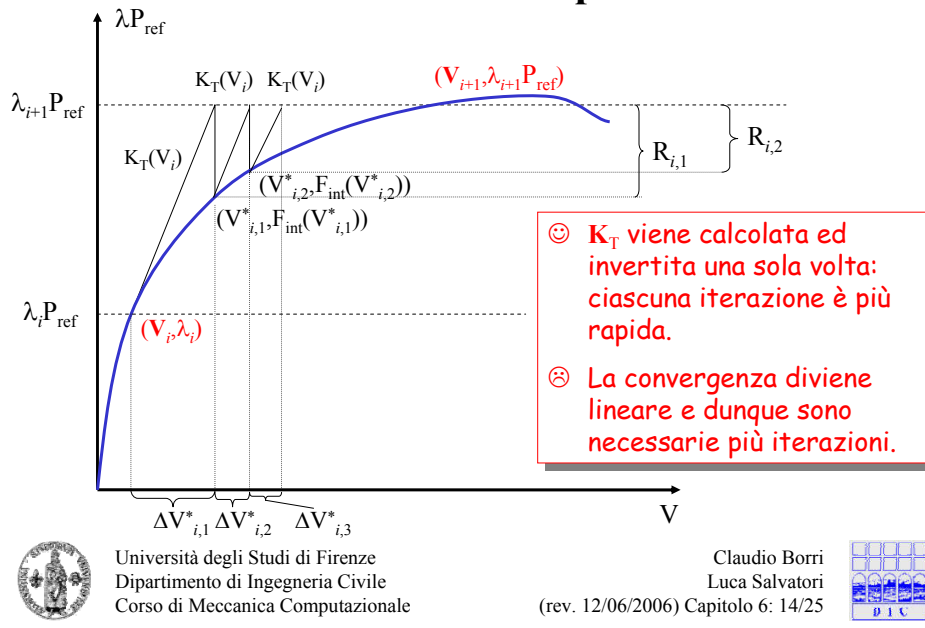
Claudio Borri  
Luca Salvatori  
(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 12/25



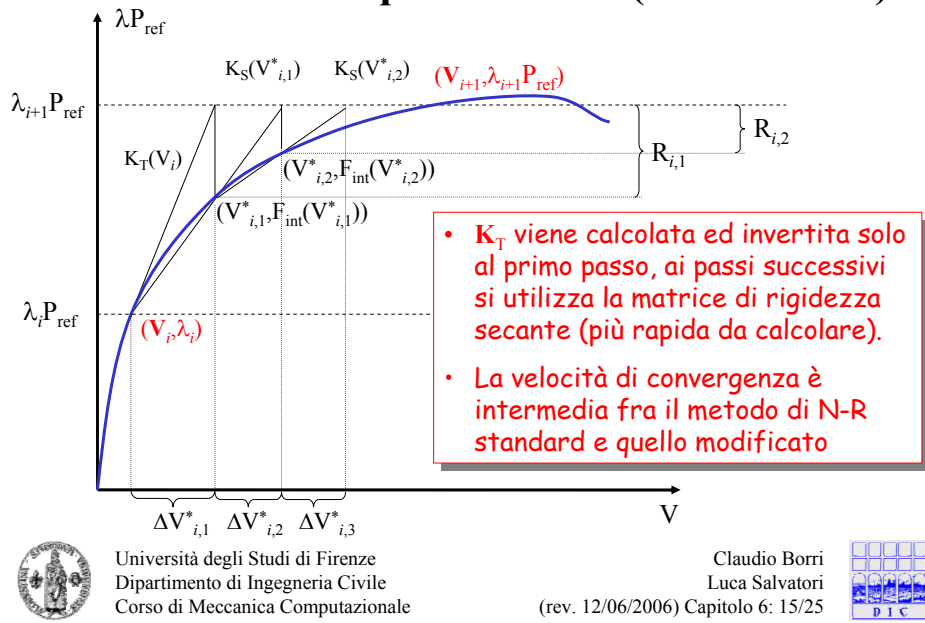
## Metodi iterativi: Newton-Raphson



## Metodi iterativi: Newton-Raphson modificato



## Metodi iterativi: quasi-Newton (della secante)



## Metodi iterativi: rigidità iniziale

Il metodo della rigidità iniziale (o elastica o costante) utilizza sempre la matrice di rigidità elastica.

Il metodo richiede in genere molte iterazioni e presenta la convergenza più lenta.

In alcuni casi tuttavia rende l'analisi più stabile.



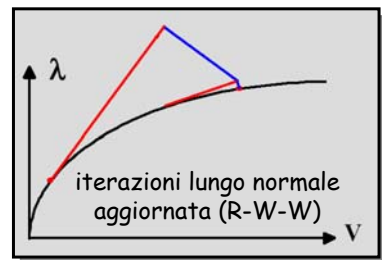
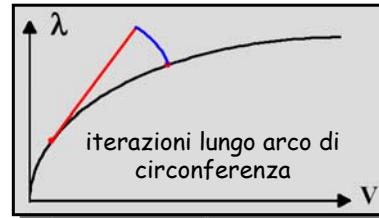
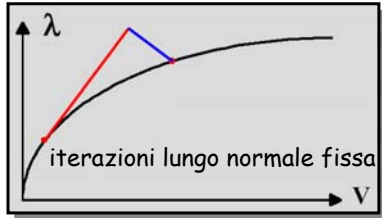
Università degli Studi di Firenze  
 Dipartimento di Ingegneria Civile  
 Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri  
 Luca Salvatori  
 (rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 16/25





## Metodi iterativi applicati alla procedura “a lunghezza d’arco”



Esistono diverse varianti della procedura “a lunghezza d’arco” che, assieme al tipo di iterazione con cui vengono implementati, prendono nomi specifici (e.g. il metodo di Riks-Wempers-Wessels è una procedura a controllo di lunghezza d’arco che proietta lungo la normale, e itera alla Newton aggiornando le matrici).



Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri  
Luca Salvatori  
(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 17/25



## Criteri di convergenza

La procedura iterativa termina quando:

$$\text{errore relativo o assoluto dell'iterazione corrente (calcolato dal programma)} \quad \delta_k = \frac{e_k}{e_{\text{ref}}} < \delta_{\text{toll}} \quad \text{precisione ricercata (fissata dall'utente)}$$

Le possibili varianti sono:

a) nella scelta della grandezza da normare:

- 1) norma dei **residui** ( $\mathbf{R}_{i,k}$ )
- 2) norma delle correzioni degli **spostamenti** ( $\Delta \mathbf{V}_{i,k}^*$ )
- 3) norma **energetica** (prodotto di  $\mathbf{R}_{i,k}$  per  $\Delta \mathbf{V}_{i,k}^*$ )

b) nella scelta del tipo di norma (euclidea, max-abs, sum-abs, ...).

c) nella scelta della quantità di riferimento (se si considera l'errore assoluto è  $e_{\text{ref}} = 1.0$ , se si considera l'errore relativo è  $e_{\text{ref}} = e_1$ ).



Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri  
Luca Salvatori  
(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 18/25



## Scelta dell'algoritmo

Non è possibile definire a priori l'algoritmo "migliore",  
ma va scelto di volta in volta in base a:

- Non-linearità fisica o geometrica
- Hardening o softening
- Dimensione del problema
- Carichi applicati in singoli punti o su intere superfici
- Non-linearità improvvise o gradualì

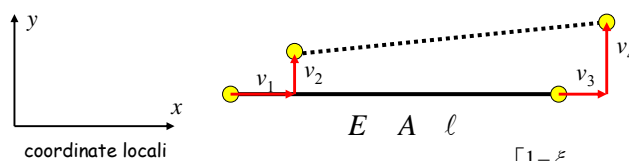


Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri  
Luca Salvatori  
(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 19/25



## Esempio di elemento geometricamente N-L: biella in formulazione lagrangiana totale



Interpolazione degli spostamenti:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & 0 & \frac{1+\xi}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\xi}{2} & 0 & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

derivate degli spostamenti:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{-u_1 + u_3}{\ell}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{-u_2 + u_4}{\ell}$$

trascurabile rispetto al termine lineare

Deformazioni (congruenza non-lineare):  $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2$

Sforzi (legame lineare):

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$$



Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri  
Luca Salvatori  
(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 20/25



## Rigidezza elastica e rigidezza geometrica

Energia interna: 
$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dV = \frac{1}{2} \int_0^\ell EA \varepsilon_{xx}^2 dx = \frac{EA\ell}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{EA\ell}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u_x}{\partial x} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^4 \right] \approx$$

trascurabile rispetto al termine del terzo ordine

$$\approx \frac{EA}{\ell} \frac{(v_3 - v_1)^2}{2} + \frac{N}{\ell} \frac{(v_4 - v_2)^2}{2} \quad \text{dove: } N = \frac{AE}{\ell} (v_3 - v_1)$$

Primo teorema di Castigliano:  $k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial v_i \partial v_j}$

Matrice di rigidezza tangente in coordinate locali:

$$\mathbf{k}_T = \mathbf{k}_E + \mathbf{k}_G = \frac{AE}{\ell} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_E} + \frac{N}{\ell} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_G}$$

$\mathbf{k}_E$  rigidezza elastica (si ottiene considerando la congruenza lineare).

$\mathbf{k}_G$  rigidezza geometrica (dipende dallo stato di sollecitazione).



Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri  
Luca Salvatori  
(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 21/25

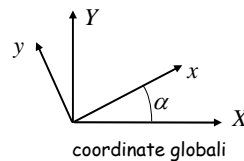


## Trasformazione di coordinate e commento

Trasformazione di coordinate:  $\mathbf{k}_{T \text{ glob}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{k}_T \mathbf{Q}$  con:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c = \cos \alpha \\ s = \sin \alpha \end{cases}$$



L'approccio classico appena visto, è formulato in modo tale che l'espressione delle forze interne abbia la forma approssimata:

$$\mathbf{f}_{\text{int glob}}(\mathbf{v}_{\text{glob}}) = \mathbf{k}_T(\mathbf{v}_{\text{glob}}) \mathbf{v}_{\text{glob}}$$

la cui derivata non è  $\mathbf{k}_T$ !



Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

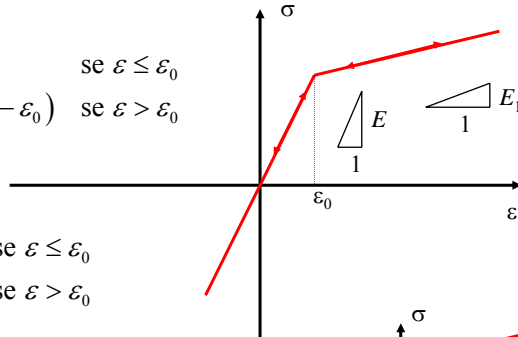
Claudio Borri  
Luca Salvatori  
(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 22/25



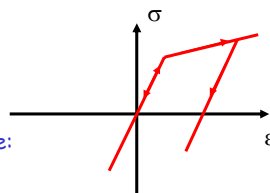
## Esempio di elemento fisicamente N-L: legge elastica bi-lineare a trazione

Legame: 
$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \text{se } \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ E\varepsilon_0 + E_1(\varepsilon - \varepsilon_0) & \text{se } \varepsilon > \varepsilon_0 \end{cases}$$

Legame tangente: 
$$D = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \begin{cases} E & \text{se } \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ E_1 & \text{se } \varepsilon > \varepsilon_0 \end{cases}$$



Attenzione: in scarico e ricarico segue sempre lo stesso percorso, NON è un comportamento plastico nel quale i percorsi di scarico hanno pendenza parallela al tratto iniziale:



Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri  
Luca Salvatori  
(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 23/25



## Biella elastica bi-lineare a trazione

Congruenza (lineare): 
$$\varepsilon = \frac{v_3 - v_1}{\ell}$$

Legame (non-lineare): 
$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \text{se } \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ E\varepsilon_0 + E_1(\varepsilon - \varepsilon_0) & \text{se } \varepsilon > \varepsilon_0 \end{cases}$$

Vettore delle forze interne in coordinate locali (equilibrio):

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \begin{bmatrix} -N \\ 0 \\ N \\ 0 \end{bmatrix} = A\sigma \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrice di rigidità tangente in coordinate locali:

$$\mathbf{k}_T = \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{v}} = \frac{AD}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Linearizzazione del legame:

$$D = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \begin{cases} E & \text{se } \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ E_1 & \text{se } \varepsilon > \varepsilon_0 \end{cases}$$

Segue la consueta trasformazione in coordinate globali.

Naturalmente è possibile formulare elementi con non-linearità fisiche e geometriche contemporaneamente!



Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri  
Luca Salvatori  
(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 24/25



## Nel prossimo capitolo

### Cenni di stabilità computazionale



Università degli Studi di Firenze  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Corso di Meccanica Computazionale

Claudio Borri  
Luca Salvatori  
(rev. 12/06/2006) Capitolo 6: 25/25

